

DUREE : 3H

TSE

COEF : 4

EXERCICE 1 :

(5 points)

Soit $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un complexe. On pose $u = \left(\frac{z}{1-i}\right)^2$

- 1- Détermine u pour qu'on ait $z = 1 + i$ **0.25pt**
- 2- Détermine les valeurs de z pour qu'on ait on a $u = 4$ **0.75pt**
- 3- Détermine la partie réelle et la partie imaginaire de u . **0.75pts**
- 4- Détermine les complexes z de parties réelles 5 pour que u soit réel. **0.5pts**
- 5- Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ soit le point $M(z)$.
Détermine et construire l'ensemble des points M du plan pour que :
 - a- (E) : u soit réel. **1pt**
 - b- (F) : u soit imaginaire pur. **1pt**
 - c- (G) : La racine carrée du module de u soit égale à 1. **0.75pt**

EXERCICE 2 :

(5 points)

Dans le repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ On désigne par M, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives

$$a, z_1 = (1+i)a + 2i \text{ et } z_2 = (1-i)a + 2i$$

- 1- a-/ Vérifie que $z_2 = -iz_1 - 2 + 2i$ **0.5pt**
b-/ En déduire que $r(M_2) = M_1$ où r est une rotation dont on précisera l'angle α et le centre Ω . **1pt**
- 2- On suppose que $a \neq 0$ et I milieu du segment $[M_1M_2]$
a-/ Détermine l'affixe de I **0.5pt**
b-/ Montre que M est l'image de I par une translation t dont on précisera l'affixe du vecteur. **0.75pt**
c-/ Montre que les droites $(I\Omega)$ et (M_1M_2) sont orthogonales. **0.75pt**
- 3- Montre que $\frac{z_1-a}{z_2-a}$ est imaginaire pure si et seulement si $|a| = 2$ **0.75pt**
- 4- En déduire l'ensemble des points $M(a)$ du plan complexe pour que les points Ω, M, M_1 et M_2 soient cocycliques. **0.75pt**

PROBLEME : (10 points)

I- Soit le polynôme complexe P défini par

$$P(z) = iz^4 - 3(i-1)z^3 + (i-5)z^2 + (-1+9i)z + 7 + 4i$$

- 1- Prouve que i et -1 sont solutions de l'équation $P(z) = 0$ **0.75pt**
- 2- Détermine les complexes a, b et c pour que $P(z) = (z+1)(z-i)(az^2 + bz + c)$ **0.75pt**
- 3- En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$ des questions précédentes **1.5pt**

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ unité graphique **1cm**

On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives les $i, 2+3i, 2-i$ et -1

- 1- Démontre que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A . **0.75pt**
- 2- Soit (Γ) l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = 7$
 - a- Vérifie que le point B appartient à (Γ) **0.75pt**
 - b- On pose $z = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Démontre que $M(z) \in (\Gamma) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y = 7$. **0.75pt**
 - c- En déduire la nature et ses éléments caractéristiques de (Γ) **0.75pt**
- 3- Place les points A, B, C et D et représente (Γ) **1pt**
- 4- **NB** : Une symétrie centrale est une homothétie du même centre et de rapport $k = -1$

Soit B' image de B par la symétrie centrale de centre A

 - a- Calcule l'affixe du point B' . **1pt**
 - b- Justifie que $\widehat{(\vec{B'C}, \vec{B'B})} = \frac{\pi}{4}$ **1pt**

« La rapidité, vigilance et l'ingéniosité seront vos meilleurs atouts . »