

DUREE : 3H

TSE

COEF : 4

EXERCICE 1 : (5 points)**Situation :** Un grand père possède une somme d'argent en dinars, comprise entre 460 et 730

- S'il la partage entre ses treize petits-fils à part égales, il lui reste **8 dinars** ;
- Le jour de la fête de ramadan, seuls onze parmi ses petits-fils étaient présents, après le partage de cette somme à parts égales entre eux, il lui reste **10 dinars**.

L'objectif de l'exercice est de trouver la somme qu'avait ce grand père et la part des petits-fils.1- On considère le système (S) $\begin{cases} n \equiv 10[11] \\ n \equiv 8[13] \end{cases}$ a- Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $11u + 13v = 1$ sachant que $(-7, 6)$ en est solution particulière **1pt**b- pour tout couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ solution de (E), on pose $N = 88u + 130v$ Prouve que $N = 10 - 22u$ **0.5pt**c- Vérifie que N est solution du système (S) **0.5pt**d- Déduis-en une solution N_0 de (S) **0.5pt**2- Soit $k \in \mathbb{Z}$, montre que si **11 divise k** et **13 divise k** alors **143 divise k** **0.5pt**3- a-/ Soit $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant le système (S). Montre que $n - 164 \equiv 0[143]$ **0.5pt**b-/ Déduis-en qu'un entier n est solution de (S) si et seulement si $n = 143p + 21$ avec $p \in \mathbb{Z}$ **0.5pt**4- **Résolution de la situation :****Consigne 1 :** Calcule par déduction la somme qu'avait ce grand père **0.5pt****Consigne 2 :** Déduis-en la part de chacun des onze petits-fils présents le jour de la fête. **0.5pt****EXERCICE 2 :** (5 points)I- Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on considère l'intégrale $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x} dx$ 1. Calcule I_1 **0.5pt**2. a-/ Montre que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n - I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \sin^n x dx$ **0.75pt**b-/ Déduire des questions précédentes la valeur de I_3 et I_5 **0.75pt**3. Soit f l'application qui à tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ associe $f(x) = \ln \left[\left(\tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)^2 + \frac{\pi}{4} \right]$ a-/ Montre que f est une primitive de la fonction g définie sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ par $g(x) = \frac{1}{\cos x}$ **0.5pt**b-/ Déduire des questions précédentes les valeurs de I_0 **0.5pt**II- Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on considère l'intégrale $J_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$ 1- Calcule J_0 et J_1 **0.75pt**2- a- En utilisant la technique d'intégration par parties, montre que $J_{n+1} = e - (n + 1)J_n$ **0.75pt**

b- Déduis-en J_2 et J_3 **0.5pt**

PROBLEME : ----- (10 points)

PARTIE A (3 point) : Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2(3-2\ln x)}{2} + 1 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On note par (φ) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- Etudie la dérivabilité de f en 0. **0.5pt**
- 2- Calcule la limite de f en $+\infty$. **0.5pt**
- 3- Calcule la fonction dérivée $f'(x)$ pour tout $x > 0$. **0.5pt**
- 4- Etudie le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$, puis dresse son tableau de variation. **0.75pt**
- 5- Montre que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $]4 ; 5[$ et détermine une valeur approchée de α 10^{-1} près. **0.75pt**

PARTIE B (5 point) :

- 1- Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (φ) au point d'abscisse $x = 1$. **0.5pt**
- 2- On considère la fonction $g : x \rightarrow f(x) - 2x - \frac{1}{2}$ définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - a- Calcule $g'(x)$, puis $g''(x)$ où g' et g'' désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de g . **1pt**
 - b- Etudie le sens de variation de g' . **0.75pt**
 - c- Déduis-en le signe de $g'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$. **0.5pt**
 - d- Dresse le tableau de variation de g , calculez $g(1)$ et précise le signe de $g(x)$. **0.75pt**
 - e- Déduis-en de la question d- la position de la courbe (φ) par rapport à la tangente (T) . **0.5pt**
- 3- Construis la courbe (φ) et la tangente (T) (unité graphique : 2 cm). **1pt**

PARTIE C (2 point) : Soit n un entier naturel non nul

- 1- Exprime $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 t^2 \ln t \, dt$ en fonction de n (utilise une intégration par parties). **1pt**
- 2- a- Déduis-en en fonction de l'entier n , l'aire A_n exprimée en cm^2 du domaine plan délimité par (φ) , la tangente (T) et les droites d'équations $x = \frac{1}{n}$ et $x = 1$ **0.5pt**
b- Calcule la limite de A_n et interprète le résultat obtenu. **0.5pt**

<< La rapidité, vigilance et l'ingéniosité seront vos meilleurs atouts . >>