

Devoir de Mathématiques N°02 (3h - Coef: 5)**Exercice 1 : (5 points)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 2cm)

On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = e^{i\frac{5\pi}{6}}z$ et on définit une suite de points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante : M_0 a pour affixe $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et pour tout entier naturel n , $M_{n+1} = f(M_n)$. On appelle z_n l'affixe de M_n

1) précise la nature et les éléments caractéristiques de f puis place les points M_0 ; M_1 et M_2 (1pt)

2) Montre que pour tout entier naturel n , on a l'égalité $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}$ (1pt)

(On pourra utiliser un raisonnement par récurrence)

3) Soient n et p deux entiers naturels tels que n est supérieur à p (1pt)

Montre que les points M_n et M_p sont confondus si et seulement si $(n - p)$ est multiple de 12

4) On considère l'équation $(E) : 12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs

a) Après avoir vérifié que le couple $(4; 9)$ est solution, résous l'équation (E) (1pt)

b) En déduis les entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$ (1pt)

Exercice 2 : (5 points)

1) α et β sont deux entiers et $n = 2^\alpha \times 3^\beta$

Le nombre de diviseurs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs de n

a) Montre que : $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$ (0,5pt)

b) En déduis les valeurs de n (0,5pt)

2) On pose $U_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}, \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montre que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+3} \equiv U_n [7]$ (0,5pt)

b) Trouve les entiers naturels n tels que $U_n \equiv 0 [7]$ (0,5pt)

3) Les nombres suivants écrits en base deux sont-ils divisibles par sept ? (0, 5pt)

$A = \overline{1010100}$; $B = \overline{1001001000}$ (On utilisera le résultat précédent)

4) Trouve le reste de la division par 7 de 1971^{1000} (0,5pt)

5) Soit $b > 1$ et $b^2 - 1 = (b - 1)(b + 1)$

a) Détermine $b^2 \wedge (b - 1)$ (0,5pt)

b) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $b^2x + (b - 1)y = 1$ (0,75pt)

6) Calcule le quotient Q et le reste R de la division de $M = \overline{35d3}^{16}$ et $N = \overline{28e}^{16}$ (0,75pt)

La disposition pratique de la technique de la division en base seize est exigée et on donne :

$28e \times f = 2662$	$28e \times 2 = 51c$	$28e \times 3 = 7aa$	$28e \times 4 = a38$	$28e \times 5 = cc6$	$28e \times 6 = f54$	$28e \times 7 = 11e2$
$28e \times 8 = 1470$	$28e \times 9 = 16fe$	$28e \times a = 199c$	$28e \times b = 1c2a$	$28e \times c = 1eb8$	$28e \times d = 2146$	$28e \times e = 23d4$

Problème : (10 points)

- I. Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 2cm
- On désigne par A, B, C et M les points d'affixes respectives $2i; i; \frac{3}{2}i$ et z . Soit M' le point d'affixe z' l'image de M tel que : $z' = \frac{iz+2}{z-i}$
- 1) Exprime z en fonction de z' **(0,75pt)**
 - 2) Montre que si M appartient à l'axe des abscisses, son image M' appartient au cercle de centre C et de rayon $\frac{1}{2}$ **(1pt)**
 - 3) Vérifie que $z' = \frac{i(z-2i)}{z-i}$ puis donne une interprétation géométrique du module et de l'argument de z' **(1pt)**
 - 4) En déduis que $OM' = \frac{AM}{BM}$ et $(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA}) + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ **(1pt)**
 - 5) En déduis l'ensemble des points M tel que $|z'| = 1$ **(0,75pt)**
 - 6) Détermine l'ensemble des points M' sachant que M est un point du cercle de diamètre [AB] distinct des points A et B **(1 pt)**
 - 7) Montre que pour tout $z \neq 1$, $(z' - i)(z - i) = 1$ **(0,75pt)**
 - 8) En déduis que $BM' \times BM = 1$ **(0,75pt)**
 - 9) En déduis que lorsque M parcourt le cercle de centre B et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$, les points M' d'affixe z' sont tous sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon **(1pt)**
- II. A l'occasion d'une fête, le gouvernement a renoncé à certaines taxes sur le bétail. Un marchand d'oviné, ayant bénéficié de la subvention, a vendu tous ses animaux (des moutons et des chèvres) faisant ainsi une recette de 1000000 de CFA. Chaque mouton coûtait 80000 CFA tandis que la chèvre faisait 50000 CFA. Sachant que le marchand avait plus de chèvres que de moutons, détermine le nombre de moutons et le nombre de chèvres qu'avait vendu ce marchand. **(2pts)**