

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : -----[5 points]

1) Résous dans $\mathbb{C}$:

a) $(1 + i)z^2 - (1 + i)z + 2i = 0$ (0,75pt)

b) $(z^2 - 4z)^2 + (4z - 10)^2 = 0$ (0,75pt)

c) $3|z| - 2z = 21 - 8i$ (0,75pt)

d) $\left(\frac{2z-1}{2z+1}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ (0,75pt)

2) Dans chacun des cas suivants, détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation affine f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' .

a) $z' = -2z + 1 - 3i$ (0,5pt)

b) $z' = (1 + i)z + 6 - 4i$ (0,5pt)

c) $z' = i\bar{z} + 5 - 3i$ (0,5pt)

3) Soit le point M d'affixe $z = 5 - 4i + 3e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi; \pi]$. Montre que lorsque θ décrit $]-\pi; \pi]$, alors le point M décrit un cercle dont on précisera le centre et le rayon. (0,5pt)

Exercice 2 : -----[5 points]

Les parties A et B sont indépendantes.

A. 1) Démontre que, pour tout entier relatif n , $(\sqrt{3} + i)^{2n+1} - (i - \sqrt{3})^{2n+1}$ est un nombre réel. (0, 5pt)

2) Démontre que si z est un nombre complexe non nul de module 1, alors le nombre complexe $u = \frac{1+z+z^2}{z}$ est un nombre réel. (0, 5pt)

3) Détermine, si possible, les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles $(1 - i\sqrt{3})^n$ est :

a) un réel ; (0, 25pt)

b) un réel négatif ; (0, 25pt)

c) un réel positif ; (0, 25pt)

d) un imaginaire pur. (0, 25pt)

B. On considère le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

Soit le polynôme de variable complexe z :

$$P(z) = z^3 + 2(1 - 2 \cos 2\alpha)z^2 + 4(1 - 2 \cos 2\alpha)z + 8 \text{ avec } \alpha \in]-\pi; \pi[.$$

1) Calcule $P(-2)$. (0, 25pt)

2) Détermine les réels a, b et c tels que $P(z) = (z + 2)(az^2 + bz + c)$. (0, 5pt)

3) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. (1pt)

- 4) Détermine le module et un argument de chacune des solutions de l'équation $P(z) = 0$.
(0, 75pt)
- 5) Soit A, B et C les points images dans le plan complexe des solutions de l'équation $P(z) = 0$. Pour quelles valeurs de α , le triangle ABC est-il équilatéral ? (0, 5pt)

Problème : -----[10 points]

Les parties A et B sont indépendantes.

A. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On considère le polynôme complexe :

$$p(z) = z^4 - 4(2 - i)z^3 + 3(5 - 8i)z^2 + 2(2 + 19i)z - 20 - 12i.$$

1. Calcule $(4 - i)^2$; $(4 - i)^3$; $(4 - i)^4$ et $p(4 - i)$. (1pt)
2. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure. (2pts)
3. Soit les points P, Q, R et S images respectives des solutions z_P, z_Q, z_R et z_S de l'équation $p(z) = 0$ telles que $\overline{z_P} = -z_P$; $\overline{z_Q} = z_Q$ et $\operatorname{Im}(z_P) = \operatorname{Im}(z_R)$ où Re désigne la partie réelle et Im la partie imaginaire.

Place les points P, Q, R et S dans le repère. (0,5pt)

4. Détermine la nature du quadrilatère $PQRS$. (0,75pt)

B. Le plan complexe est un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points $A; B$ et C d'affixes respectives $-i, -2i$ et $1 - i$.

A tout point M d'affixe $z = x + iy$, on associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ défini par :

$$z' = \frac{z^2}{z + i}.$$

- 1) a) Détermine les affixes des points B' et C' associés respectivement aux points B et C . (0,5pt)
- b) Montre que les points A, B' et C' sont alignés. (0,5pt)
- c) Détermine la nature du triangle ACC' . (0,5pt)
- 2) a) Exprime x' et y' en fonction de x et y . (1pt)
- b) Détermine et construis l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que z' soit un imaginaire pur. (0,5pt)
- 3) a) Que représente géométriquement $|z + i|$? (0,25pt)
- b) Trouve une relation simple liant les longueurs OM', OM et AM . (0,5pt)
- c) Détermine et construis l'ensemble (F) des points M du plan tel que les points M et M' soient sur le même cercle de centre O . (0,5pt)
- 4) Détermine l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que :
 - a. $MA^2 + MC^2 = 12$ (0, 5pt)
 - b. $\arg(iz - 1 - i) = \pi + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (0, 5pt)
 - c. $\arg(z + 2i) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (0, 5pt)