

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES

DUREE : 3H

TSE

COEF : 4

EXERCICE 1 : (4 points)

Pour tout entier naturel $n \geq 0$, on considère l'intégrale : $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx$

1. Calcule I_0 **0.5pt**
2. Calcule I_1 à l'aide d'une intégration par parties. **1pt**
3. a/ Etablis que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx$ **0.75pt**
 b/ En déduire la limite de la suite (I_n) **0.5pt**
 a/ A l'aide d'une intégration par parties, montre que pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = -I_n + \frac{1}{(n+1)!}$ **0.75pt**
 b/ Déduis-en la valeur de I_2 **0.5pt**

EXERCICE 2 : (4 points)

Soit (U_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 3 \text{ et } U_1 = 3 \\ U_{n+2} = \frac{4}{3}U_{n+1} - \frac{4}{9}U_n ; n \geq 2 \end{cases}$

- 1- Calculez U_2 **0.25pt**
- 2- a/ Démontre que la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = U_{n+1} - \frac{2}{3}U_n$ est une suite géométrique dont on en précisera la raison et le premier terme. **1pt**
 b/ Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$ **0.5pt**
- 3- Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n U_n$
 a/ Démontre que (w_n) est une suite arithmétique dont on en précisera la raison. **0.75pt**
 b/ En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = (n+2) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ **0.5pt**
- 4- Calcule les sommes $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ et $S'_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$ en fonction de l'entier n **1pt**

PROBLEME : (12 points)**Partie A :** (3pts)

Soit l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$

- 1- Détermine la solution de l'équation $(F) : y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0 **0.75pt**
- 2- Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = \ln 2$ et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} g(x)$
 a- Calcule $g(0)$ **0.25pt**
 b- Calcule $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et $g(x)$ **0.5pt**
 c- Montre que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ **0.75pt**
 d- En déduire l'expression de $g(x)$ et $f(x)$ telle que f soit solution de (E) . **0.75pt**

Partie B : ----- (2.5pts)

Soit $g(x) = \ln(1 + e^{-2x}) - \frac{1}{1+e^{2x}}$

- 1- Calcule les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$ **0.75pt**
- 2- Etudie les variations de g sur $\mathbb{R}$ et dresse le tableau de variation. **1.25pt**
- 3- En déduire le signe de g suivant les valeurs réelles de x . **0.5pt**

Partie C : ----- (3.5pts)

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{2x} \ln(1 + e^{-2x})$ et (Cf) sa courbe représentative dans le plan $(\mathcal{P})$ rapporté au repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique 4cm

- 1- Calcule la limite de f en $+\infty$ **0.5pt**
 - a/ Montre que pour tout réel x , $f(x) = e^{2x}[\ln(1 + e^{2x}) - 2x]$ **0.5pt**
 - b/ En déduire la limite de f en $-\infty$ **0.5pt**
- 2- a/ Montre que pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^{2x}g(x)$ **0.5pt**
 - b/ Etudie les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresse le tableau de variation. **0.5pt**
- 3- Construis (Cf) **0.5pt**
- 4- a/ Montre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1+e^{-2x}} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$
 - b/ Interprète et calcule l'aire du domaine $D = \left\{ M(x, y) \in (\mathcal{P}); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases} \right. \right\}$ **0.5pt**

Partie D : ----- (3pts)

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*$

- 1- a/ Montre $f([0, 1]) \subset [0, 1]$ **0.5pt**
 - b/ En déduire que Montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ **0.5pt**
- 2- Montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ la suite est croissante. **0.5pt**
- 3- En déduire que la suite (U_n) converge vers α **0.5pt**
- 4- Vérifie que $f(\alpha) = \alpha$ et que $0 < \alpha < 1$ **0.5pt**
- 5- Utilise le graphe de f pour donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près. **0.5pt**