

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : -----[5 points]

1. a) Démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n+1}{n+2}$. (0, 75pt)

b) Démontre que, pour tout entier naturel n , on a : $3 \times 7^{3n+1} + 5^{n+1} \equiv 0[13]$. (0, 75pt)

2) a) Détermine l'ensemble des entiers relatifs n tels que $2n + 1$ divise $4n - 13$. (0, 5pt)

b) Démontre que pour tout entier relatif n , les nombres $2n + 1$ et $5n + 2$ sont premiers entre eux. (0, 75pt)

c) Déduis-en les entiers relatifs n pour lesquels la fraction $\frac{(4n-13)(5n+2)}{(n^2-2)(2n+1)}$ est un entier relatif. (0, 5pt)

3) a) Résous dans $\mathbb{Z}$: $\begin{cases} 4x \equiv 1[5] \\ 3x \equiv 7[11] \end{cases}$. (0, 75pt)

b) Résous dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 - 5x = 0$. (0, 5pt)

c) Résous dans $\mathbb{Z}$: $6x \equiv 8[30]$. (0, 5pt)

Exercice 2 : -----[5 points]

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On considère le polynôme complexe $f(z) = z^4 + 4z^3 - 8z + 20$.

1. Démontre que si z_0 est une solution de l'équation $f(z) = 0$, alors $\bar{z}_0$ est aussi une solution de cette équation. (0,25pt)

2. Calcule $f(-3 + i)$ puis résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. (1,5pt)

3. Déduis-en quatre nombres réels a, b, c et d tels que : $f(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + cz + d)$. (0,5pt)

4. Soit les points A, B, C et D images respectives des solutions z_A, z_B, z_C et z_D de l'équation $f(z) = 0$ telles que $Re(z_A) = Re(z_D) < 0$ et $Im(z_A) = Im(z_B) > 0$ où Re désigne la partie réelle et Im la partie imaginaire.

a) Démontre que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. (0,75pt)

b) Détermine la nature du quadrilatère $ABCD$ puis calcule le périmètre et l'aire de $ABCD$. (0,75pt)

5. À tout point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'affixe $z \neq -3 + i$, on associe le point $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ d'affixe :

$$z' = \frac{iz - 1 - i}{z + 3 - i}$$

a) Exprime x' et y' en fonction de x et y . (0, 5pt)

b) Détermine l'ensemble des points M tels que z' soit réel. (0, 25pt)

c) Démontre que $|z' - i| = \frac{|2+4i|}{|z+3-i|}$ puis déduis-en l'ensemble des points M' lorsque M parcourt le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{5}$. (0, 5pt)

Problème : -----[10 points]

Les parties A, B, C et D sont indépendantes.

A. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

Les points A , B , C et D du plan complexe ont pour affixes respectives : $z_A = -1 - 2i$,

$z_B = -3 + i$ et $z_C = 1 + 8i$.

1. Détermine l'écriture complexe de la similitude directe $\mathcal{S}$ de centre A et telle que $\mathcal{S}(B) = C$. **(0, 5pt)**
 2. Détermine les éléments caractéristiques de $\mathcal{S}$. **(0, 5pt)**
 3. Détermine l'expression analytique de $\mathcal{S}$. **(0, 5pt)**
 4. Détermine puis construis l'image (D') de la droite $(D): y = x - 1$ par $\mathcal{S}$. **(0, 5pt)**
- B.** Youba a acheté 15 oranges et 7 mangues à 1275 F CFA. Quels peuvent être les prix unitaires de ces fruits sachant qu'ils sont tous les deux multiples de 5 ? **(1, 5pt)**
- C.** 1. Soit N un entier naturel tel que $N = \overline{aa4b}^5$ et $N = \overline{bbc}^7$.
Détermine les entiers naturels a , b et c . **(1pt)**
- 2) a) 173 est-il un nombre premier ? (On justifiera sa réponse) **(0, 5pt)**
b) Décompose 38925 en produit de facteurs premiers puis détermine le nombre de diviseurs positifs de 38925. **(0, 5pt)**
b) Détermine l'ensemble des diviseurs positifs de 38925 premiers avec 5. **(0, 5pt)**
c) Après avoir trouvé les entiers naturels dont le carré est un diviseur de 38925, détermine les couples $(a; b)$ d'entiers naturels tels que :
 $m^2 - 403d^2 = 38925$ où $m = \text{PPCM}(a; b)$ et $d = \text{PGCD}(a; b)$. **(1pt)**
- D.** 1. Soit n un entier naturel, on pose $a' = 2n + 18$; $b' = n + 3$ et $d' = \text{PGCD}(a; b)$.
a) Détermine les valeurs possibles de d' . **(0, 5pt)**
b) Détermine l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels $d' = 12$. **(0, 5pt)**
c) Détermine l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels $d' = 1$. **(0, 5pt)**
2. Résous dans $\mathbb{N}^2$:
a) $\begin{cases} \text{PGCD}(a; b) = 28 \\ a + b = 168 \end{cases}$ **(0, 75pt)**
b) $\begin{cases} \text{PPCM}(x; y) = 120 \\ x^2 + y^2 = 801 \end{cases}$ **(0, 75pt)**