

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES**Exercice 1 : -----[6 points]**

1. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^6 + (1 - 2i\sqrt{2})z^3 - 2i\sqrt{2} = 0$. (1 pt)
2. Détermine les entiers x et y tels que $N = 3x92y$ soit divisible par 3 et 5. (0,75 pt)
3. Soit la fonction h définie par : $h(x) = \frac{3}{x(3-x^2)}$.
 - a) Détermine le domaine de définition D_h de h . (0,25 pt)
 - b) Détermine les nombres réels a, b et c tels que : $\forall x \in D_h ; h(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{3-x^2}$. (0,5 pt)
 - c) Déduis-en la valeur de $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 h(x)dx$. (0,75 pt)
 - d) En utilisant une intégration par parties, calcule l'intégrale : $J = \int_0^2 \frac{6x \ln(x)}{(3-x^2)^2} dx$. (0,75 pt)
4. Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_1^e x^{n+1} \ln x$.
 - a) Calcule I_0 à l'aide d'une intégration par parties. (0,5 pt)
 - b) Montre que pour tout entier naturel n , $0 \leq I_n \leq \frac{e^{n+2}-1}{n+2}$. (0,5 pt)
 - c) A l'aide d'une intégration par parties, exprime I_n en fonction de n . (0,75 pt)
 - d) Déduis-en I_1 . (0,25 pt)

Exercice 2 : -----[4 points]

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right|$ et g la fonction définie par $g(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right|$.

1. Détermine l'ensemble de définition de f . (0,5 pt)
2. Etudie les variations de f . (1 pt)
3. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 2cm).
 - a) Montre que (C) admet une asymptote oblique dont on précisera l'équation. (0,25 pt)
 - b) Dresse le tableau de variation de g . (0,75 pt)
 - c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$. (0,25 pt)
 - d) Précise la position de (C) par rapport à l'asymptote oblique. (0,5 pt)
4. Montre que le point $I \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4} \right)$ est centre de symétrie pour (C) . (0,5 pt)
5. Donne une équation de la tangente à (C) au point I . (0,25 pt)

Problème : -----[10 points]

Partie A

Soit la fonction numérique h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = 1 + x - 3x \ln x$.

1. a) Etudie les limites de h en 0 et en $+\infty$. (0, 5 pt)
b) h est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, définis son prolongement g puis étudie la dérivabilité de g en 0. (0, 75 pt)
2. Etudie le sens de variation de h et dresse son tableau de variation. (1pt)
3. Montre que l'équation $h(x) = 0$ a une solution unique $\alpha \in [1; 2]$. Détermine un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} . (0, 75 pt)
4. Précise, suivant les valeurs de x , le signe de $h(x)$. (0, 5 pt)

Partie B

Soit la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{(1+x)^3}$, (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal ($O; \vec{i}, \vec{j}$) (unités graphiques : 2 cm en abscisse, 10 cm en ordonnée).

1. a) Etudie la limite de f lorsque x tend vers 0. (0, 5 pt)
b) Démontre que, pour tout $x \in [1; +\infty[$: $0 \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x^3}$. Déduis-en la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$. (0, 75 pt)
c) Précise les asymptotes à la courbe représentative de f . (0, 5 pt)
2. Détermine la fonction dérivée f' de f et montre que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x)$ a le même signe que $h(x)$. (0, 75 pt)
3. a) Montre que $f(\alpha) = \frac{1}{3\alpha(1+\alpha)^2}$. (0, 5 pt)
b) Dresse le tableau de variation de f . (0, 5 pt)
4. a) Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1. (0, 25 pt)
b) Construis (T) et (C_f). (1 pt)
5. On note $\mathcal{A}$ l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.
a) Montre que : $\forall x \in [1; e], \frac{\ln x}{64} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x^3}$. (0, 75 pt)
b) A l'aide d'une intégration par parties, calcule : $I = \int_1^e \ln x dx$ et $J = \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx$. (0, 5 pt)
c) Déduis-en un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ puis donne une valeur approchée de $\mathcal{A}$. (0, 5 pt)