

Exercice 1

1) Montre que le nombre complexe $U = (1 + i\sqrt{3})^7 + (1 - i\sqrt{3})^7$ est un réel

2/ on donne le nombre complexe $V = \left(\frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2021}$.

Ecris sous la forme $a + ib$, le nombre complexe V

3), on considère le nombre complexe $W = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Détermine l'entier naturel n pour que W soit imaginaire pur.

4) Montre que le nombre complexe $A = z^n - \frac{1}{z^n}$ est un imaginaire pur avec $|z| = 1$

5) Ecris sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

$$a = (5 - 2i)^2 + \frac{10i}{(2i - 1)(1 + i)} \quad \text{et} \quad b = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) + i \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)}{2 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) - 2i \sin\left(\frac{2\pi}{15}\right)}$$

6) Résous dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

a) $z^2 - 2ie^{i\theta} \cos \theta z - e^{i2\theta} = 0$; b) $z^6 + (1 - i)z^3 - i = 0$

c) $(2iz - 3)^2 + (z + 1 + i)^2 = 0$; d) $\left(\frac{z - i}{z + i}\right)^4 = 1$

Exercice 2

1) Détermine le nombre complexe z tel que $|z| = 2$ et $\arg[z(-\sqrt{3} + i)] = \frac{\pi}{3}$

2) Linéarise les expressions suivantes : $\sin 3x \cos^2 x$ et $\sin^3 5x$

3) a/ Montre que l'équation (F) : $1 + z^2 + z^4 = 0$ ssi $z^6 = 1$

b/ En déduis sous forme algébrique toutes les solutions de (F)

4) on considère le nombre complexe $z = -\sin 2\theta + 2i \cos^2 \theta$ avec $\theta \in [0; \pi]$

a) Trouve la forme trigonométrique de z

b/ Détermine θ pour que z et $1 - z$ aient même module.

5) soit f la transformation du plan définie par $z' = (1 + i)\bar{z} + 1 + 2i$.

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f .

6/ On considère l'équation (E) : $z^4 - (6 + i)z^3 + (15 + 7i)z^2 - (18 + 22i)z + 8 + 16i = 0$

Résous (E). sachant qu'elle admet une solution réelle z_0 et une solution imaginaire pure z_1 .

Exercice 3

I) Détermine l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant les cas suivants :

① $z = 2 - 3i + 2e^{i\frac{3\pi}{8}}$; ② $\text{Arg}(z - 1 + i) = \frac{\pi}{3}$; ③ $|z + 1 + 2i| = |-\sqrt{3} + i|$

II) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^4 = 16i$. En déduis les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\left(\frac{z-2}{2}\right)^4 = i$ puis trouve ces solutions sous forme exponentielle

III/ 1) Calcule $(1 + 2i)^4$

2) Trouve les racines 4^{ième} de l'unité sous forme cartésienne

3) Détermine les racines 4^{ième} de $-7 - 24i$ sous forme algébrique.

IV/ On considère l'équation (E) : $z^3 + (-1 - i)z^2 + 2(1 + 3i)z + 8 = 0$

1) Vérifie que $2i$ est une racine de (E) puis détermine les autres racines

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ on donne les nombres complexes $z_A = 2i$; $z_B = 2 - 2i$; $z_C = -1 + i$

a/ Place les points A, B, C

b/ Détermine l'affixe z_D du point D pour que ADBC soit un parallélogramme. Place le point D.

3) On pose $Z = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$

a) Ecris Z sous forme algébrique et en déduis la nature du triangle ABC

b) Les points A, B, C appartiennent-ils à un même cercle ? si oui Précise le centre et le rayon de ce cercle.

c) Détermine l'affixe z_E du point E milieu de [AB]. Place le point E.

d) Montre que les points A, B, C, D sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Bonne chance