

Evaluation sommative N°10

Exercice 1

1) Pour tout nombre complexe z , on considère : $f(z) = z^4 - 8z^3 + 21z^2 - 8z + 20$.

a) Soit b un nombre réel.

En déduis que l'équation $f(z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution.

b) Montre qu'il existe deux réels α et β que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe z , $f(z) = (z^2 + 1)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

c) Résous dans l'ensemble des nombres complexes l'équation

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal.

a) Place dans le plan les points A, B, C et D ayant respectivement pour affixes :

$$a = i; b = -i; c = 4 + 2i \text{ et } d = 4 - 2i.$$

b) Montre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont-on déterminera le centre et le rayon. Détermine une équation de ce cercle.

c) Détermine l'abscisse de l'isobarycentre G des points A, B, C et D.

d) Détermine l'ensemble E des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = 8.$$

Trace E sur la figure précédente.

e) Détermine puis construis l'ensemble F des points M du plan tels que :

$$MA^2 - 3MB^2 - MC^2 = -27.$$

Exercice 2

ABC est un triangle isocèle en A tels que $AB = 5$ et $BC = 4$. Soit I le milieu du segment $[BC]$.

1) Construis le point G barycentre de (A, 3), (B, -2) et (C, 1).

2) Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que : $3MA^2 - 2MB^2 + MC^2 = 59$.

a) Vérifie que I appartient à (E).

b) Détermine et construis l'ensemble (E).

3) Soit l'ensemble (F) des points M du plan tels que : $3MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = 51$.

a) Vérifie que I appartient à (F).

b) Détermine et construis (F).

Exercice 3

Soit les points A, B et C d'affixe respective $z_A = -1 + 2i$; $z_B = 2 + i$ et $z_C = 1 - 2i$.

1. Met sous forme algébrique $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. En déduis la nature du triangle ABC.
2. Montre que les points A, B et C appartiennent à un même cercle.
3. Détermine l'ensemble (E) des points M tels que $\frac{MA}{MB} = 2$.
4. Détermine l'ensemble (F) des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 3$.
5. Détermine l'ensemble (H) des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 24$.
6. Détermine l'ensemble (I) des points M tels que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \pi$.
7. Détermine l'ensemble (J) des points M tels que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}}) = \frac{\pi}{3}$.