

Evaluation sommative N°8

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 + \sin x)e^{1-x}$.

On note C la courbe représentative de f dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) > 0$.
2. a. Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x - \sin x$.
b. En déduis que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $-2 + \cos x - \sin x < 0$.
c. Montre que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. a. Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{1-x} < f(x) < 3e^{1-x}$.
b. En déduis les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
c. Interprète géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.
4. a. Montre que, sur l'intervalle $[0; \pi]$, l'équation $f(x) = 4$ admet une solution unique α .
b. Donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
5. Représente la courbe C sur $[1; 4]$.

Exercice 2

Soit l'équation différentielle $(E): y'' - 2y' + y = (4 - x)e^x$.

1. Détermine les réels a et b tel que $f(x) = (ax + b)e^x$ soit solution de (E) .
2. Montre que la fonction $f - h$ est solution de (E) si et seulement si h est solution de l'équation $(E'): y'' - 4y' + 4y = 0$.
3. Intègre l'équation (E') .
4. Détermine l'ensemble solution de l'équation (E) .
5. Etudie les variations de la fonction f puis trace la représentation graphique de la courbe de f .

Exercice 3

1. On considère la fonction $f(x) = x^2 e^{1-x}$ définie $\mathbb{R}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 1cm).
 - a. Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Que peut-on conclure graphiquement ?
 - b. Montre que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis détermine sa fonction dérivée f' .
 - c. Dresse le tableau de variation de f puis trace la représentation graphique de f .

2. Pour tout entier naturel non nul, on donne la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^1 x^{n-1} e^{1-x} dx$.
- Montre que I_n existe.
 - Trouve une relation entre I_n et I_{n+1} .
 - Calcule les trois premiers termes de cette suite.
 - Donne une interprétation graphique de I_3 . L'on fera apparaître sur la représentation graphique de la question 3.c.
 - Démontre que pour tout $x \in [0; 1]$, l'inégalité : $x^{n-1} \leq x^{n-1} e^{1-x} \leq e x^{n-1}$.
 - En déduis un encadrement de I_n puis la limite de I_n .