

Exercice 1 :.....(6pts)

On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$

1. Calcule $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$ puis en déduis que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z^2 + 3)Q(z)$ où Q est un polynôme du second degré dont tu détermineras.
2. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. Place dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = i\sqrt{3}$; $z_B = -i\sqrt{3}$; $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ et $z_D = \overline{z_C}$ puis montre que ces quatre points sont cocycliques, c'est à dire appartiennent à un même cercle.
4. On note E le symétrique de D par rapport à O . Montre que : $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ puis en déduis la nature du triangle BEC .

Exercice 2 :.....(5pts)

Partie A : on considère le nombre complexe $Z = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$

- 1) Détermine le module et un argument de Z^2 puis en déduis le module et un argument de Z .
- 2) Dédire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
- 3) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{3} + 1) \cos x + (\sqrt{3} - 1) \sin x = \sqrt{2}$

Partie B

- 1) Linéarise $A = \sin^5 x$
- 2) En utilisant la formule de Moivre, démontre que $\cos(4x) = 1 - 8\cos^2 x + 8\cos^4 x$ et $\sin(4x) = 4 \cos x \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x)$

Problème :.....(9pts)

- I. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère les points A, B et D d'affixes respectives : $z_A = -\frac{1}{2}$; $z_B = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_D = 1 + i\sqrt{3}$.
On suppose (S) la similitude plane directe du plan transformant A en B et B en D .

1. a. Détermine l'écriture complexe de (S) .
 - b. En déduis les éléments caractéristiques de (S) .
 2. Soit M_n un point d'affixe z_n , on pose pour tout entier naturel n ; $M_{n+1} = S(M_n)$ ou M_{n+1} admet pour affixe z_{n+1} . Exprime z_{n+1} en fonction de z_n .
 3. On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_n = |z_n|$ avec $U_0 = \frac{1}{2}$. Démontre que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
 4. Justifie que la distance $OM_{12} = 2048$.
- II. Soit le nombre $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$
1. Démontre que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$.
 2. Calcule les réels $\alpha + \beta$ et $\alpha \times \beta$. Déduis-en que α et β sont solutions de l'équation $(E): z^2 + z - 1 = 0$
 3. Exprime α en fonction de $\cos \frac{2\pi}{5}$ puis β en fonction de $\cos \frac{4\pi}{5}$. Puis précise le signe de α et celui de β .
 4. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) et en déduis les valeurs exactes de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$.