



Aucun brouillon ne sera corrigé. La clarté et la précision seront prises en compte dans la correction.

Situation d'évaluation 1

6 points

I- Soit l'intégrale I_n définie pour tout entier naturel n par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^{2n+1} x} dx$

1) Montre que la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sin x}$ sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$.

2) En déduis la valeur de I_0 .

3) Démontre à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$2nI_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}} + (2n-1)I_{n-1} \quad \text{Indication : } \frac{1}{\sin^{2n+1} x} = \frac{1}{\sin^{2n-1} x} \times \frac{1}{\sin^2 x}$$

4) En déduis la valeur de I_2 .

II- On donne l'équation différentielle (E): $y' \ln(2x^2 + 1) + \frac{4x}{2x^2+1} y = e^{2x+1}$

a) Détermine l'ensemble des primitives de $u: x \mapsto e^{2x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Soit la fonction f , la solution de (E) qui s'annule en 1. Détermine la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto f(x) \cdot \ln(2x^2 + 1)$. En déduis la solution f de (E).

Situation d'évaluation 2

04 points

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a où a est un réel strictement positif. Le point G est le barycentre du système $(A, 4); (B, 1); (C, 1)$ et le point I milieu du segment [BC]

1) On donne pour point M du plan, la fonction f définie par :

$$f(M) = 4MA^2 + MB^2 + MC^2$$

a- Justifie que $f(M) = 6MG^2 + f(G)$.

b- Calcule BG^2 et $f(G)$ en fonction de a .

c- Détermine et construis l'ensemble (E) des points M du plan tels que $f(M) = \frac{51}{2} a^2$

2) Détermine et construis l'ensemble (F) des points M du plan tels que :

$$\|4\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 3\|\vec{MB} + \vec{MC}\|$$

Problème

10 points

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n la suite de fonctions numériques de la variable réelle définies sur $\mathbb{R}^*$ par : $f_n(x) = \frac{x^n}{e^x - 1} + 2$. On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).

PARTIE A

1) Montre les courbes (C_n) se coupent en un seul point A dont on précisera les coordonnées

- 2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1 - x)e^x - 1$
- Dresse le tableau de variations de g
 - Calculer $g(0)$ et en déduis le signe de g .

PARTIE B

L'objet de cette partie est de tracer la courbe (C_1) de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = \frac{x}{e^x - 1} + 2 \text{ et } f_1(0) = 3 \text{ dans le plan muni d'un repère orthonormé } (O; \vec{i}, \vec{j}).$$

On admettra que f_1 est dérivable en 0 et que $f_1'(0) = -\frac{1}{2}$

- Détermine la limite de f_1 en $-\infty$ et $+\infty$
- Précise les équations des éventuelles à (C_1)
- Montre que pour tout x non nul, $f_1'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
- Montre que l'équation $f_1(x) = x$ admet une unique solution α et que $\alpha \in [2; 2,5]$.
- Montre pour tout $x \in [2; 2,5]$, on a : $f_1(x) \in [2; 2,5]$
- Donne le sens de variation de f_1 puis dresse son tableau de variation.
- Détermine l'équation de la tangente (T) à (C_1) en 0.
- Trace la courbe (C_1) .

PARTIE C

Soit la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ définie par
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f_1(U_n) \end{cases}$$

- Montre que pour tout $x \in [2; 2,5]$, $g(x) \geq -20$ et que $(e^x - 1)^2 \geq 40$.
 - En déduis que pour tout $x \in [2; 2,5]$, on a : $|f_1'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
- Montre pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq U_n \leq 2,5$
- Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ et que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
- En déduis la convergence de (U_n) et précise sa limite.
- Détermine le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $|U_n - \alpha| \leq 10^{-2}$.
- En déduis la valeur approchée de α à 10^{-2} près.