

DEVOIR N°1 DE MATHEMATIQUES

Série : TSE**Date** : 20/11/2025**Durée** : 3h**Coef** : 5**Exercice 1 : (5 points)**

Soit $\alpha \in]-\pi; \pi[$. On donne le nombre complexe $f(\alpha) = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$

1) Ecris $f(\alpha)$ sous forme exponentielle. (On pourra discuter suivant les valeurs de α)

2) On donne les nombres complexes A et B tels que $A = f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $B = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

a) Donne A et B sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

b) Mets $\frac{A}{B}$ sous forme trigonométrique et sous la forme algébrique.

En déduis les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

Exercice 2 : (5 points)

1) linéarise les expressions suivantes :

a) $\sin(3x) \cdot \cos(5x)$; b) $64 \cos^4\left(\frac{2}{3}x\right)$; c) $\sin^5(x)$

2) Soit l'équation $(E) : z^4 = -7 + 24i$

a. Détermine les racines quatrièmes de 1 sous forme algébrique.

b. Calcules $(2 + i)^4$ puis résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) .

Problème : (10 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Partie A :

1) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - (2 + 6i)z - 16 + 12i = 0$.

2) Soit $P(z) = z^3 - (4 + 6i)z^2 - (12 - 24i)z + 32 - 24i$.

a) Déterminer la solution réelle z_0 de l'équation $P(z) = 0$.

b) Donne une forme factorisée de $P(z)$ puis achève sa résolution dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Partie B :

On donne les points A ; B et C d'affixes respectives : $z_A = 2$; $z_B = 4 + 2i$ et $z_C = -2 + 4i$.

1) a) Calcule le rapport $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et déduis-en la nature du triangle ABC .

b) soit le point E d'affixe $2i$, montre que les points ACE sont alignés.

Démontre que E est le milieu du segment $[AC]$.

c) Détermine (Δ) l'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant l'équation suivantes :

$$|z - 4 - 2i| = |z + 2 - 4i|$$

2) Soit S la similitude du plan laissant invariant le point A et qui transforme B en C .

a) Détermine le rapport k et l'angle θ de la similitude S .

b) Détermine l'écriture complexe associée à la similitude S .