

DEVOIR n°2

Epreuve de MATHEMATIQUES

Classe : TSE

Durée : 3 heures

Coefficient : 4

**Situation 1.....(4 points)**

$z$  étant un nombre complexe, on considère l'équation  $(E) : z^4 = -7 + 4i\sqrt{2}$ .

- 1) Vérifie que  $u = \sqrt{2} + i$  est une solution de  $(E)$ .
- 2) Donne sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité.
- 3) En déduis dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes toutes les solutions de  $(E)$  sous forme algébrique.

**Situation 2.....(6 points)**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On appelle  $f$  l'application qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  ( $z \neq -i$ ) associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :  $z' = \frac{iz+3-3i}{z+i}$ .

Soient  $A, B, C$  et  $D$  les points d'affixes respectives  $z_A = -i$ ,  $z_B = -4 + 2i$ ,  $z_C = i$  et  $z_D = 3 + 3i$ .

- 1) a) Détermine sous forme algébrique et trigonométrique l'affixe du point  $B'$  image de  $B$  par  $f$ .  
b) Détermine les coordonnées  $(x'; y')$  de  $M'$  en fonction de celles  $(x; y)$  de  $M$ .
- 2) Détermine et représente l'ensemble des points  $M$  tels que :  
a)  $z'$  soit réel.  
b)  $z'$  soit imaginaire pur.  
c)  $|z'| = 1$ .
- 3) a) Montre que pour tout  $z \neq -i$ , on a :  $(z+i)(z'-i) = 4 - 3i$ . En déduis que  $AM \times CM' = 5$ .  
b) Détermine l'ensemble des points  $M'$  lorsque  $M$  décrit le cercle de centre  $A$  et de rayon 2.

**Situation 3.....(5 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, I, J)$  ; unité graphique : 2 cm.

On considère dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $P$  défini par :  $P(z) = z^3 - 2iz^2 + (4 + 4i)z + 16 + 16i$ .

- 1) a) Démontre que l'équation  $P(z) = 0$  admet une solution réelle  $z_0$  et une solution imaginaire pure  $z_1$ .  
b) Déduis-en les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation :  $P(z) = 0$ .
- 2) On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $-2, 4i$  et  $2 - 2i$ .  
a) Place dans le repère  $(O, I, J)$  les points  $A, B$  et  $C$ .  
b) Calcule les distances  $AB$  et  $AC$ , puis justifie que :  $\text{mes}(\widehat{AB; AC}) = -\frac{\pi}{2}$ .  
Déduis-en la nature du triangle  $ABC$ .  
c) Détermine l'affixe du point  $D$  tel que  $ABCD$  soit un carré.
- 3) Soit  $\mathcal{S}$  la similitude directe de centre  $A$  qui transforme  $B$  en  $D$ .  
a) Détermine l'écriture complexe de  $\mathcal{S}$  et détermine les éléments caractéristiques de  $\mathcal{S}$ .  
b) Détermine les affixes des points  $C'$  et  $T$  tel que  $C'$  image de  $C$  par  $\mathcal{S}$  et  $T$  antécédent de  $A$  par  $\mathcal{S}$ .

**Situation complexe.....(5 points)**

Les autorités municipales du village de **MANDIAKUY** envisage de réhabiliter une maternité au profit des femmes.

Consulté pour réaliser le plan d'aménagement, l'urbaniste **Yirabo** a prévu :

- La réhabilitation de 6 blocs pouvant abriter les femmes et leurs bébés.  
Chaque bloc a une dimension  $L = 2|z_A|$  de longueur et  $\ell = 5|z_C|$  de largeur exprimée en mètres, et comprend chacun un nombre de chambre  $N = |z_B|$  avec  $z_A, z_B$  et  $z_C$  solution de l'équation

$$(E) : z^3 - \left( \frac{1+8\sqrt{3}}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z^2 + (2\sqrt{3} + 16 - 6i)z - 8 + 8i\sqrt{3} = 0 \text{ tels que } z_A = \overline{z_B} \text{ et } \text{Im}(z_A) > 0.$$

- La construction d'un hangar qui sert le lieu de vaccination des enfants ayant la forme de l'ensemble  $(\varphi)$  des points M d'affixe  $z$  vérifiant :  $|(1 + i\sqrt{3})z - 2| = 6$ .

**Tâches :** Le travail à faire consiste à aider la sage-femme pour trouver des réponses à ses préoccupations.

- 1) Prouve que le nombre complexe  $\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$  est une solution de l'équation  $(E)$ .
- 2) Résous dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $(E)$ .
- 3) Détermine la longueur et la largeur des blocs puis le nombre de chambre par bloc.
- 4) Détermine l'ensemble  $(\varphi)$ .
- 5) Dédus-en la forme du hangar.