

DEVOIR SURVEILLÉ			
LFANA	EPREUVE DE MATHÉMATIQUES SÉRIE : TSE	COEFF : 5 DURÉE : 3H	ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 MARDI 24/02/2026

EXERCICE1 : (6pts)

A/ 1. Détermine une primitive des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 \sin(x)$

b) $g(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 4}{x^2 + 2x + 1}$

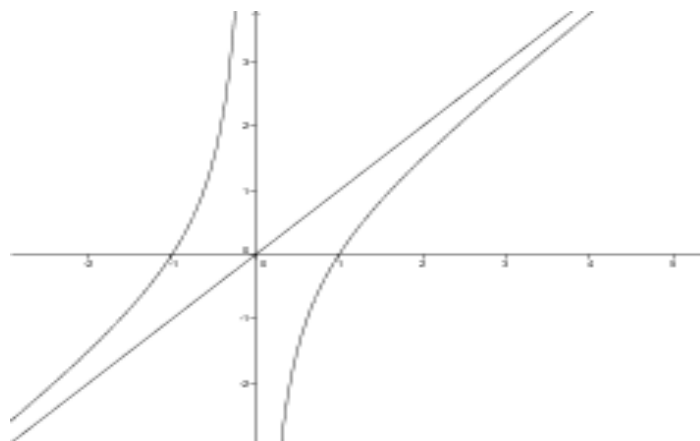
2 . Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx$

a) En écrivant $\cos^n(x) = \cos(x) \cos^{n-1}(x)$, démontre que

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

b) Calcule alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) dx$

B/ La figure suivante est la représentation graphique d'une fonction f



1-) Quel est l'ensemble de définition Df de f ?

2-) Trouve les limites de f aux bornes de cet ensemble.

3-) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.

4-) Détermine les réels a et b tels que l'équation de la droite $y = ax + b$ soit asymptote à la courbe de f

EXERCICE2 : (4pts)

1. On donne $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin^2 x dx$.

Calculer $I + J$; $I - J$ et en déduire les valeurs de I et de J.

2. Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie sur $] - 1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2}.$$

a. Déterminer les réels a , b et c tels que $f(x) = ax + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$.

b. En déduire $\int_{\frac{1}{2}}^0 f(x) dx$

Problème : (10pts)

(les parties I et II sont indépendantes)

I-/ A. Soit la fonction f définie sur $[0 ; 4]$ par $f(x) = \sqrt{3x+4}$

1. Etudie les variations de f .

2. Montre que f réalise une bijection de $[0 ; 4]$ sur un intervalle I que l'on précisera

3. Montre que pour tout $x \in [0 ; 4]$; $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$

4. En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, montre que pour tout x de $[0 ; 4]$ on a : $|f(x) - 4| \leq \frac{3}{4}|x - 4|$. En déduire un encadrement de f sur $[0 ; 4]$ par deux fonctions affines que l'on précisera

5. Montre que pour tout $x \in [0 ; 4]$: $f(x) - x = \frac{(4-x)(x+1)}{\sqrt{3x+4} + x}$

I-/ B. Soit la suite (u_n) , définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 4$

2. Etablis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 4| \leq \frac{3}{4}|u_n - 4|$

3. Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 4| \leq 4\left(\frac{3}{4}\right)^n$

4. En déduire la limite de (u_n)

II-/ Soit la fonction paramétrique f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = \frac{mx^2 + (m+1)x + 1}{x+2m}$ où m est un paramètre réel et (C_m) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Donne en fonction de m , l'ensemble de définition de f_m .
2. Montre que les courbes (C_m) se coupent en trois points fixes dont on déterminera les coordonnées.
3. Détermine en fonction de m les équations des asymptotes obliques à (C_m) .
4. Etudie les fonctions f_{-1} et f_1 puis trace les courbes (C_{-1}) et (C_1) dans le même repère
Vérifie les résultats précédents.