
Exercice : (7points)

I-) Soit n un entier naturel. On pose : $A = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx)$ et $B = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(kx)$.

- 1) Calcule et écris sous forme exponentielle : $A + iB$. **(1pt)**
- 2) En déduis des expressions plus simples de A et B . **(0,5pt)**

II-) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0$. **(1pt)**

III-) Soit l'équation (E) : $z^5 = 1$.

- 1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). (On donnera les solutions sous forme exponentielle). **(1pt)**
- 2) a) Que vaut la somme des solutions de (E) ? **(0,25pt)**
b) En déduis que : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$. **(0,5pt)**
- 3) a) Démontre que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation : $4x^2 + 2x - 1 = 0$. **(0,5pt)**
b) En déduis la valeur de : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. **(0,25pt)**
- 4) Soit l'équation (E') : $(z - 1)^5 = (z + 1)^5, (z \in \mathbb{C})$
a) Démontre que si z_0 est solution de (E'), alors : $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1$. **(0,25pt)**
b) En déduis que les solutions de (E') sont imaginaires pures. **(0,75pt)**
c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'). **(1pt)**

Problème : (13points)

I-) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -2 - 2i$; $z_B = 2 - 2i$ et $z_C = 2 + 2i$.

On note I le point milieu du segment $[AC]$, S la similitude plane directe laissant invariant le point A et qui applique B sur I. On désigne par f la transformation du plan complexe définie par : $f = SoS$.

A tout point M du plan d'affixe z , on associe son image M' d'affixe z' .

Soit (C) le cercle de diamètre $[AI]$ et (C'') son image par l'application f .

- 1) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f . **(4pts)**
- 2) Détermine l'équation complexe de (C'') . **(1pt)**
- 3) a) Détermine l'expression analytique de f . **(0,5pt)**
b) En déduis l'équation de l'image par f de la droite (AD) où le point D est le symétrique du point C par rapport à l'axe des ordonnées. **(1,5pt)**
c) Quel est la nature du quadrilatère ABCD ? **(0,5pt)**
d) En déduis le centre et le rayon du cercle auquel appartiennent les points A, B, C et D. **(0,5pt)**
- 4) Trace dans le même repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$: (C) , (C'') , (AD) et ABCD. **(2pts)**

II-) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(o; \vec{u}; \vec{v})$. On donne les points $A\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ et $B(1; -1)$. On considère l'application S du plan P dans P qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' ainsi défini par : M_1 est l'image de M par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et M' l'image de M_1 par l'homothétie de centre B et de rapport 3.

Le plan P est identifié à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

- 1) Exprime z' en fonction de z . **(2pts)**
- 2) Détermine la nature de S et en déduis ses éléments caractéristiques. **(1pt)**