

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES**Exercice 1 :****[6 points]**

*1) Linéarise $z_1 = \cos^2\left(\frac{3x}{2}\right) \sin^3\left(\frac{3x}{2}\right)$. (0,5pt)

2) a) Ecris $z_2 = \frac{7+3i}{2+5i}$ et $z_3 = \frac{2+\sqrt{3}+i(1-2\sqrt{3})}{i+2}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. (1pt)

b) Ecris $z_4 = \frac{z_3}{z_2}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. (0,5pt)

c) Déduis-en les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et de $\sin \frac{\pi}{12}$. (0,5pt)

3) Ecris sous forme trigonométrique $z_3 = \frac{-2i(3-i\sqrt{3})^4}{(\sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5})(-1+i)^3}$ et $z_4 = -1 - i + \sqrt{2}$. (1pt)

4) Résous dans $\mathbb{C}$:

a) $z^2 - 2\sqrt{2}z + 5 = 0$ (0,5pt)

b) $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ (0,5pt)

5) On donne $u = \sqrt{2} - \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6})$.

a) Ecris u^2 sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. (1pt)

b) Déduis-en le module et un argument du nombre complexe u . (0,5pt)

Exercice 2 :**[4 points]***Les parties A et B sont indépendantes.*A. Dans chacun des cas suivants, détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation affine f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' .

1) $z' = -z + 3 - 2i$ (0,25pt)

2) $z' = (1+i)z + 3 - 4i$ (0,5pt)

3) $z' = (1+i)\bar{z} + 3 - 4i$ (0,5pt)

B. On considère le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$.Soit le polynôme de variable complexe z :

$P(z) = z^3 + (1 - 2i \sin \alpha)z^2 - 2(3 + 2i \sin \alpha)z + 6i \sin \alpha$ avec $\alpha \in]-\pi; 0[$.

1) Calcule $P(-3)$. (0, 25pt)

2) Détermine les réels a, b et c tels que $P(z) = (z+3)(az^2 + bz + c)$. (0, 5pt)

3) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. (0, 75pt)

4) Détermine le module et un argument de chacune des solutions de l'équation $P(z) = 0$. (0, 75pt)

5) Soit z_1 et z_2 les solutions non réelles de l'équation $P(z) = 0$.

Ecris z_1 et z_2 sous la forme $\lambda + e^{i\alpha}$ où λ est un nombre réel. Déduis-en que lorsque α décrit $] -\pi; 0[$, les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le plan complexe sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. (0,5pt)

Problème : ----- [10 points]

A. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On considère le polynôme complexe $p(z) = z^4 - 2(2 - i)z^3 + 2(3 - 4i)z^2 - 6(2 - i)z + 9$.

1. Calcule $p(1)$ et $p(-3i)$. (1pt)

2. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$. (1pt)

B. Les points A, B, C et D du plan complexe ont pour affixes respectives : $z_A = 1, z_B = -3i, z_C = 3$ et $z_D = i$.

M est le point d'affixe z distinct de A et M' celui d'affixe z' distinct de D avec $z' = \frac{3-iz}{1-z}$.

1. Démontre que $z' = i \frac{z-z_B}{z-z_A}$ puis interprète géométriquement le module et un argument du nombre complexe z' . (1pt)

2. On pose $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

a. Ecris z' sous la forme algébrique. (1,5pt)

b. Déduis-en l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que z' soit réel. (1pt)

c. Vérifie que B appartient à (E) puis représente (E) . (0,5pt)

3. a. Exprime z en fonction de z' . (0,5pt)

b. Déduis-en que $OM = \frac{M'C}{M'D}$ (0,5pt)

c. Montre que, lorsque le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point A , son image M' appartient à une droite fixe que l'on définira géométriquement. (0,5pt)

d. Montre que si M est un point de l'axe réel, distinct de O et de A , alors M' appartient à la droite (CD) . (0,5pt)

4. Détermine l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que :

a. $|z'| = 1$ (0,5pt)

b. $|z'| = \frac{2}{3}$ (0,5pt)

c. $\arg(z') = \pi + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (0,5pt)

d. $\arg(z + 3i) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (0,5pt)