

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : -----[6 points]

1. Détermine le reste de la division euclidienne de 5^n par 7 suivant les valeurs de l'entier naturel n puis déduis-en le reste de la division euclidienne de 5^{314} et de 26^{45} par 7.
2. Soit N un entier naturel tel que $N = \overline{a0b}^5$ et $N = \overline{bac}^7$.
Détermine les entiers naturels a , b et c .
3. Détermine les entiers relatifs n tels que la fraction $\frac{2n+18}{n+3}$ soit un entier relatif.
4. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n , $A = \frac{2n+18}{n+3}$ est-il irréductible ?
5. Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N} ; \frac{12n+1}{30n+2}$ est irréductible.
6. On veut planter des arbres sur le périmètre d'un terrain triangulaire de côtés 132 m, 156 m et 204 m, de telle sorte qu'il y ait un arbre à chaque sommet du triangle et que les arbres soient également espacés.
Quel est le nombre minimum d'arbres que l'on pourra planter si l'on veut que la distance entre deux arbres soit exprimée en un nombre entier de mètres ?
7. Démontre que pour tout entier relatif n , les nombres $n + 2$ et $2n^2 + 3n - 1$ sont premiers entre eux.

Exercice 2 : -----[4 points]

1. On considère le polynôme $P(z) = 4z^4 - 10z^3 + 21z^2 - 10z + 4$ avec $z \in \mathbb{C}$.
 - a) Démontre que si z_0 est une solution de l'équation $P(z) = 0$, alors $\bar{z}_0$ est aussi une solution de cette équation.
 - b) Démontre que si z_0 est une solution de l'équation $P(z) = 0$, alors $z_0 \neq 0$ et $\frac{1}{z_0}$ est aussi une solution de cette équation.
 - c) Calcule $P(1 - i\sqrt{3})$ et déduis-en toutes les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
2. Kéita dit qu'il a entre 200 et 210 livres à la bibliothèque.
Lorsqu'il fait des tas de 3 livres, il lui en reste 1.
Lorsqu'il fait des tas de 7 livres, il lui en reste 2.
Combien a-t-il de livres ?

Les parties A, B, C et D sont indépendantes.

A. Calcule les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^3 + 11x^2 + 8x - 4}{x^3 - 12x - 16}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+7x} - \sqrt{5x^2-4}}{\sqrt{2x+5} - \sqrt{x^2+5}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + \sqrt{8x^2 + 5x + 1})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2} \sin x}{1 - \sqrt{2} \cos x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2}$$

B. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-10}+2}{x-2} ; \text{ si } x \neq 2 \\ f(2) = m \end{cases}$$

Détermine la valeur du nombre réel m pour que f soit continue en 2.

C. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les fonctions f, g et h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :

$$f(x) = |x+3| - \frac{4}{(x+2)^2} ; g(x) = -\frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} \text{ et } \begin{cases} h(x) = \frac{1-x+\sin(x^2-1)}{x^3-1} \text{ si } x \neq 1 \\ h(1) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

1. a) Détermine l'ensemble de définition D_f de f puis écris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

b) Calcule les limites de f aux bornes de D_f et déduis-en les éventuelles asymptotes à la courbe de f .

c) Etudie la dérivabilité de f au point d'abscisse -3 puis donne une interprétation graphique des résultats obtenus.

2. Calcule les limites de g aux bornes de son ensemble de définition et déduis-en les éventuelles asymptotes à la courbe de g .

3. a) h est-elle continue en 1 ? Justifie ta réponse.

b) Calcule les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.

D. On considère les fonctions f, g et h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}, g(x) = (\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}) \sin(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) \text{ et}$$

$$h(x) = x \sin(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}).$$

1. Détermine l'ensemble de définition D_f de f puis calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

b) Montre que pour tout $x \in D_f$; $g(x) = 2 \frac{\sin f(x)}{f(x)}$ puis calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

3. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.