

DEVOIR :**ECOLE
LUMIÈRE**

Série : T. S. E		Durée : 3 h00
Epreuve de : Mathématiques	2025-2026	COEF : 4

Exercice 1: 5 pts

- I. Ecris sous forme exponentielle $z_0 = \frac{(1+i\sqrt{3})(\sin x + i\cos x)}{2(1-i)(\cos x - i\sin x)}$ 0,75 pt
- II. Soit le complexe On considère le nombre complexe $z = i - \sqrt{3}$
- 1) Ecris sous formes trigonométrique et cartésienne les racines carrées de z . 1 pt
 - 2) En déduis les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et de $\sin \frac{5\pi}{12}$. 0,75 pts
- III. Soit l'équation (E): $z^4 - 2z^3(\cos \alpha + i\sin \alpha) + 2z^2(1 + i\sin 2\alpha) - 2z(\cos \alpha + i\sin \alpha) + 1 = 0$ où $\alpha \in \mathbb{R}$
- 1) Déterminer deux nombres a et b tels que : $(E) \Leftrightarrow z^2 \left[\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + a\left(z + \frac{1}{z}\right) + b \right] = 0$. 0,75 pt
 - 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 + aZ + b = 0$; puis l'équation (E). 1,75 pt

Exercice 2: 4,50 pts

- I. z étant un nombre complexe, on considère l'équation (E): $z^4 = -7 + 4i\sqrt{2}$
- 1) Vérifier que $u = \sqrt{2} + i$ est une solution de (E). 0,75 pt
 - 2) Déterminer sous forme algébrique toutes les solutions de (E). 1 pt
- II. On considère les complexes $a = 1 - i$; $b = 2 - i$ et $c = 3 + i$.
- 1) Ecrire les complexes a^3 ; $\left(\frac{a}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)^2$ et $(a^4 e^{i\pi})^5$ sous forme trigonométrique. 1,75 pts
 - 2) On pose $S = \frac{z-b}{z-c}$ et on désigne par A ; B ; C et M les points-images de a ; b ; c et z
 - a) Interpréter géométriquement le module et un argument de S . 0,50 pt
 - b) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $|S| = 1$. 0,50 pt

Problème : 10,50 pts

- I. On pose $U = e^{2i\frac{\pi}{7}}$, $S = U + U^2 + U^4$ et $T = U^3 + U^5 + U^6$
- 1) Calcule U^7 . 0,50 pt
 - 2) Démontre que S et T sont conjugués, et que la partie imaginaire de S est positive. 1,75 pt
 - 3) Calcule $S + T$ et $S.T$. 1 pt
 - 4) En déduis que $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ et $\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ 1,75 pt
- II. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$. On appelle f l'application qui à M d'affixe $z \neq 2$ associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{z-1-i}{z-2}$
- Soit A ; B et C les points d'affixes respectives $a = 1 + i$; $b = 1 - i$ et $c = 2$
- 1) Détermine $f(A)$ et $f(B)$. 0,75 pt
 - 2) Détermine le point D tel que : $f(D) = C$. 0,5 pt
 - 3) Interprète géométriquement $|z - 1 - i|$ et $|z - 2|$. 0,50 pt
 - 4) En déduis que si le point M appartient à la médiatrice de $[AC]$, $M' = f(M)$ appartient au cercle (Γ) dont on précisera le centre et le rayon. 0,75 pt
- III. Pour tout nombre complexe $z \neq -1$, on pose : $g(z) = \frac{iz-1}{(z+1)^2}$
- 1) Résoudre l'équation : $y \in \mathbb{R}, g(iy) = iy$. 0,75 pt
 - 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $g(z) = z$ 0,75 pt
 - 3) On désigne par z_0 ; z_1 et z_2 les solutions de (E) telles que : $Re(z_0) = 0$ et $Re(z_1) > Re(z_2)$
 - a) Vérifier que $z_1 + 1 = e^{i\frac{11\pi}{6}}$ et que $z_2 + 1 = e^{i\frac{7\pi}{6}}$. 0,75 pt
 - b) En déduire l'écriture trigonométrique de z_1 et z_2 . 0,75 pt