

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES

DUREE : 3H

TSE

COEF : 4

EXERCICE 1 : (5 points)**Consigne :** Dire preuve à l'appui si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.**Proposition 1 :** $(1-i)e^{i\frac{11\pi}{4}}(\cos\frac{\pi}{4}-isin\frac{\pi}{4})^3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ **1pt**

Proposition 2 : si $\begin{cases} |(-\sqrt{3}+i)Z| = \frac{3}{2} \\ \text{et } \arg(-\sqrt{3}+i)Z = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ alors $Z = \frac{3}{8}(1-i\sqrt{3})$ **1pt**

Proposition 3 : $[1-2\sqrt{2}-i(2-\sqrt{2})]^2 = 7-2i(6+5\sqrt{2})$ **1pt****Proposition 4 :** $z = \frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ est racine sixième de l'unité. **1pt****Proposition 5 :** L'équation (E) : $z^2 - (1+3i)z + 10+5i = 0$ d'inconnue complexe z admet une solution imaginaire pure. **1pt****EXERCICE 2 :** (5 points)Le plan complexe ($\mathcal{P}$) est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ Unité graphique **1cm**On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives les $-2\sqrt{3} + 2i$; $-2\sqrt{3}$ et $\sqrt{3} - 3i$ **1-** Montre que le triangle OBC est isocèle en O . **0.5pt****2- a-/** Mets Z_A sous forme exponentielle. **0.5pt****b-/** Construis alors les points A, B et C **1pt****3-** Soient les points D et E d'affixes respectives $2i$ et $Z_A = -\frac{Z_C}{2}$ **a-** Justifie que $\frac{Z_C - Z_E}{Z_B - Z_D} = \frac{3i\sqrt{3}}{4}$ puis interprète géométriquement le résultat. **1pt****b-** Montre que les points B, E et D sont alignés. **0.5pt****c-** Place le point D puis construis E . **0.5pt****d-** Montre que l'aire du quadrilatère $ABCD$ est égale à $8\sqrt{3}$ **1pt**

PROBLEME : (10 points)

Le plan complexe $(\mathcal{P})$ est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ Unité graphique 2cm

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives les $2i, 3+i, -1-i$

Soit f l'application du plan $(\mathcal{P})$ dans $(\mathcal{P})$ qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ telle que :

$$f(M) = M' \Leftrightarrow z' = \frac{(1-i)z+2}{z-3-i}$$

1- Détermine le domaine plan de définition de f 0.75pt

2- Détermine l'ensemble des points invariants par f 1pt

3- Détermine l'image A' du point A par f 0.75pt

4- Montre que pour tout $z \neq 3+i$, on a $z' = (1-i) \frac{z+1+i}{z-3-i}$ 0.75pt

a-/ En déduire et construis l'ensemble (E) des points $M(z)$ tel que $|z'| = \sqrt{2}$ 1pt

b-/ En déduire et construis l'ensemble (F) des points $M(z)$ tel que $\arg(z') = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 1.25pts

5- Soit le cercle $\mathcal{C}(B, 2)$ (Cercle de centre B et de rayon 2).

Ecris l'équation complexe de $(\mathcal{C})$ 0.5pt

a-/ Démontre que pour tout $z \neq 3+i$, $|z' - 1 + i| \times |z - 3 - i| = \sqrt{29}$ 1pt

b-/ En déduire le lieu géométrique du point $M'(z')$ lorsque le point $M(z)$ parcourt le cercle $(\mathcal{C})$ 1pt

6- Détermine et construis dans un second repère orthonormé l'ensemble des points $M(Z)$ tels que :

a. $(G) : \arg\left(\frac{Z-2i}{1+i}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 1pt

b. $(H) : |Z + 1 + i| < 1$ 1pt