

DEVOIR N ° 1 : Mathématiques

<u>Académie d'Enseignement de Bamako Rive Droite</u>	
<u>Année scolaire</u> : 2025-2026	<u>Durée</u> : 4 Heures
<u>Classe</u> : TSE	<u>LBabemba</u>

Exercice1 : (5 points)

I) 1. Résous dans $\mathbb{C}$: $Z^2 - (2^{\alpha+1}\cos \alpha)z = -2^{2\alpha}$ (α réel donné) (1 point)

2. Soit A et B les points d'affixes les racines de l'équation précédente dans un plan rapporté à un repère orthonormé direct $(o; \vec{u}; \vec{v})$.

Détermine α pour que le triangle OAB soit équilatéral. (0.5 point)

II) Détermine le module et un argument de :

1) $Z_1 = (1 + \cos \alpha_1) + i \sin \alpha_1$; ($0 \leq \alpha_1 < 2\pi$) (0.5 point)

2) $Z_2 = \frac{1+i \tan \alpha_2}{1-i \tan \alpha_2}$; ($\alpha_2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$) (0.5 point)

III) 1) Calcule $(\frac{1}{2} + i\sqrt{3})^4$ (0.5 point)

2) Détermine les nombres réels a, b tel que :

$$(a + ib)^4 = \frac{73}{16} - \frac{11}{2}i\sqrt{3} \quad (0.5 \text{ point})$$

IV) Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe Z telle que :

1) $|z - 1 - i| = |\bar{z} - 2 + 3i|$ (0.5 point) ; 2) $\arg\left(\frac{1}{z+2i}\right) = \frac{\pi}{2} [\pi]$ (1 point)

EXERCICE 2 : (5 points)

I) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(o; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives i et $-i$.

Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe Z distincte de $-i$ on associe le point M' tel que $Z' = \frac{1+iZ}{Z+i}$

1) Quelle est l'image par l'application f du point O (0.5 point)

2) Quel est le point qui a pour image par l'application f le point C d'affixe $1+i$? (0.5 point)

3) Montre que l'application $\frac{1+iZ}{Z+i} = z$ admet deux solutions que l'on déterminera. (0.5 point)

II) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$; unité : 2cm.

On considère l'application f définie sur $\mathbb{C}^*$ par : $f(z) = -\frac{1}{z}$

f est l'application du plan P privé de 0 dans lui-même qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $Z' = f(Z)$.

1) On pose $z = re^{i\theta}$; $r \in \mathbb{R}^{*+}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Exprime le module et un argument $f(Z)$ en fonction de r et θ . (0.75 point)

2) On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ où Z est l'affixe du milieu I de $[MM']$; x, y, X, Y sont des réels.

a) Exprime X et Y en fonction de x et y (0.75 point)

b) Détermine et représente l'ensemble (Φ) des points M tels que I appartienne à l'axe $(o, \vec{u})$ (0.5 point)

- c) Détermine et représente l'ensemble (Ψ) des points M tels que I appartienne à l'axe $(O, \vec{v})$ (0.5 point)
- 3) On suppose que $|z|=1$. On pose donc $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
- a) Calcule Z en fonction de θ (0.5 point)
- b) Caractérise géométriquement la restriction de f au cercle de centre O et de rayon 1. (0.5 point)

Problème (10 points)

PARTIE A

On considère les nombres complexes $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $u = 1 + j$.

- 1) Etablis que $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$ (1 point)
- 2) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}, u^{2n+1} = -j^{n+2}$ (1 point)
- 3) Pour tout n exprimer u^{2n} en fonction de n et j . (1 point)
- 4) Donne la forme algébrique de u^{24} et u^{21} . (1 point)

PARTIE B

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On appelle f l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{-iz-2}{z+1}$$

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = -1$, $b = 2i$ et $c = -i$

- 1) Soit C' l'image de C par f . Déterminer l'affixe c' de C' sous forme algébrique et sous forme trigonométrique. (0,75 point).
- 2) Calcule l'affixe du point D noté d ayant pour image par f le point D' d'affixe $d = \frac{1}{2}$. (0,5 point)
- 3) A tout complexe $z \neq -1$ on note $p = |z + 1|$ et $p' = |z' + i|$
 - a) Démontre que pour tout $z \neq -1$, $pp' = \sqrt{5}$. (1 point)
 - b) Si le point M appartient au cercle (Γ) de centre A et de rayon $R=2$, montre que $M'=f(M)$ appartient au cercle (Γ') dont on précisera le centre et le rayon. (0,5 point).
- 4) Pour tout nombre complexe $z \neq -1$, on pose $w = \frac{z-2i}{z+1}$.
 - a) Interprète géométriquement un argument de w . (0,5 point)
 - b) Montre que $z' = -iw$. (0,5 point)
 - c) Détermine l'ensemble (Ω) des points M d'affixe z tels que z' soit un réel non nul. (1 point)
 - d) Vérifie que le point D appartient aux ensembles (Γ) et (Ω) . (0,5 point)
- 5) Représente (Γ) , (Ω) et (Γ') . (0,75 point).

Bonne Chance !!!