

Devoir n°1 de Mathématiques

Classe : TSE

19 Novembre 2025

Durée : 3 heures

Coef : 05

- ☛ Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous obligatoires.
- ☛ La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- ☛ L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice 1 :-----[05 points]

A. Linéarise : $\cos^3\left(\frac{13}{7}x\right)\sin^3\left(\frac{13}{7}x\right)$ et $\cos(3x) \times \sin(4x) \times \sin(5x)$. (1, 5pt)

B. Ecris sous la forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants : (1,5pt)

$$z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + i \frac{1 - \sqrt{3}}{2}; \quad z_2 = 1 + i(2 - \sqrt{3}); \quad z = \frac{(1 + i \tan \theta)^2}{1 + \tan^2 \theta}; \quad \theta \in \mathbb{R} \text{ et } \theta \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$$

C. Soit α et α' deux nombres complexes de module 1. Démontre que :

1. $\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ (0, 5pt)

2. $u = \frac{\alpha - \alpha'}{1 + \alpha \alpha'}$ est imaginaire pur pour $\alpha \alpha' \neq -1$. (0, 5pt)

D. 1. Ecris sous forme exponentielle $z = 1 + i\sqrt{3}$. (0, 5pt)

2. Détermine si possible les entiers n tels que :

a. $(1 + i\sqrt{3})^n$ soit un réel négatif. (0, 25pt)

b. $(1 + i\sqrt{3})^n$ soit imaginaire pur. (0, 25pt)

Exercice 2 :-----[5,5 points]

A. Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $(2 - i)z^2 + (2 - 6i)z + 595i + 360 = 0$. (0, 75pt)

2) $-2i|z| - (1 - i)\bar{z} - 7 + 9i = 0$. (0, 75pt)

3) $z^6 = \frac{-i(1 - i\sqrt{3})^5 e^{i\frac{3\pi}{4}}}{(-\sqrt{3} + i)^2}$ (0, 75pt)

4) $(z + i)^5 = (z - i)^5 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (0, 75pt)

5) $(3z + 1)^n - (3z - 1)^n = 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$. (0, 75pt)

B. 1. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $\frac{1}{4}z^2 - (1 - \cos 3\alpha)z - 2 \cos 3\alpha + 2 = 0$. avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

(0, 75pt)

2. Ecris les solutions z_1 et z_2 de cette équation sous forme exponentielle. On discutera suivant les valeurs du réel α . (1pt)

Problème :-----[9,5 points]

Les parties A et B sont indépendantes

A. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. On note L le point d'affixe -2 . On considère l'équation $(E) : 3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et M, A et I les points d'affixes $\alpha, \frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

I. Montre que si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors les points M, A et I sont alignés.

II. Dans la suite de l'exercice on suppose que $\alpha \notin \mathbb{R}^*$

1. Montre que si $MALI$ est un parallélogramme, alors α est une solution de l'équation (E) .

2. Dans cette question on prend $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ et on note $N(\bar{\alpha})$.

a) Donne l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes $-2, \alpha, \bar{\alpha}, \frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

b) Dédus-en que les points M, L et N sont situés sur le même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

c) Place dans le repère précédent les points A, I, L, M et N . Construis (C) .

d) Détermine l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

e) Montre que le quadrilatère $MALI$ est un parallélogramme.

f) Le quadrilatère $MALI$ est-il un losange ? Justifie ta réponse.

g) Calcule le périmètre et l'aire du quadrilatère $MALI$.

h) Détermine la nature du triangle LMN .

3. a) Montre que si α est une solution de (E) alors $\bar{\alpha}$ est une solution de (E) .

b) Dédus-en toutes les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$.

B. On donne $z = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

1. Mets z^4 sous la forme algébrique.

2. Détermine les racines quatrièmes de 1.

3. Dédus-en les solutions sous la forme algébrique de l'équation :

$(E) : z^4 = 2 - 2i\sqrt{3}$.

4. Détermine les solutions de (E) sous formes trigonométriques.

5. Dédus - en le module et un argument de z .