

Devoir n°2 de MathématiquesSérie : TSEDurée :3hExercice1 : (3 points)

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2U_{n+1} = U_n + 6$.

- 1) Calcule les cinq premiers termes de cette suite.
- 2) Montre que la suite (U_n) est strictement croissante.
- 3) Démontre, par récurrence, que U_n est majorée par 6 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 4) On considère dans un plan muni d'un repère ortho normal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite $D : y = x$ et la droite, $\Delta : 2y = x + 6$. Utiliser ces deux droites pour représenter sur l'axe des abscisses U_1, U_2, U_3, U_4 .

Exercice2 : (8 points)

Soit f l'application de $\mathbb{R} - \{1\}$ définie par
$$\begin{cases} f(x) = \ln(1-x) & \text{si } x \in]-\infty; 0[\\ f(x) = x + b + \frac{2}{2x-1} & \text{si } x \in]0; +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Détermine le nombre réel b pour que f soit continue au point 0
- 2) Dans toute la suite on prend $b = 2$. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$
- 3) a) Détermine la fonction dérivée sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[;]0; \frac{1}{2}[$ et $] \frac{1}{2}; +\infty[$
- b) En utilisant la définition du nombre dérivé, étudie la dérivabilité de f au point 0.
- 4) On désigne par (Cf) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) unité 2cm. Montre que la droite D d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à (Cf) .
- 5) Calcule l'aire $A(\alpha)$ de la portion du plan limité par (Cf) la droite D et les droites

d'équations $x = \frac{e+1}{2}$ et $x = \alpha$ ($\alpha > \frac{e+1}{2}$). Détermine α de façon que $A(\alpha) = 2$

- 6) Soit g la fonction qui est égale à f sur $] -\infty; 0[$
 - a) Montre que g réalise une bijection de $\mathbb{R}^-$ vers $\mathbb{R}^+$
 - b) Détermine la bijection réciproque de g
 - c) Construire la courbe représentative de g^{-1}

Problème : (9 points)

Partie A :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$. On note par (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 2cm.

1. Calcule $f'_n(x)$ en fonction de f_n et f_{n+1} .
2. Etudie les variations de f_n (on distinguera les cas n pair et n impair)
3. Démontre que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe.
4. Détermine $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$. Que peut-on déduire pour la courbe (C_n) ? Trace sur deux figures distinctes les courbes C_1 et C_2 .

Partie B :

$$n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$

1. Démontre que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle converge.
2. Démontre que $\forall n \geq 2 \quad \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$.
En déduire la limite de I_n .
3. Démontre en utilisant la relation de la question A. 1.
Une relation entre I_n et I_{n+1} .
4. Démontre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_{n+1} = 1$. En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et détermine sa limite.

Partie C :

Dans cette partie $n = 2$

1. Démontre que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.

Le but de cette partie est de trouver une valeur approchée de α .

2. Etudie les variations de f'_2 sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ et en déduire $\forall x \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, on a

$$-0,25 \leq f'_2(x) \leq 0.$$

3. Soit la suite (U_n) définie par
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f_2(U_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- a°) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.
- b°) Démontre en utilisant la question C.2 que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|$.
- c°) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et que la suite (U_n) converge vers α .
- d°) Pour quelles valeurs de n , U_n est-elle une valeur approchée de α à 10^{-2} près ?