

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : -----[5 points]

1) a) Démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$. (0, 75pt)

b) Démontre que, quel que soit l'entier naturel n , on a : $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0[7]$. (0, 75pt)

2) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $xy - 4y = 14$. (0, 5pt)

3) Détermine les entiers x et y tels que $N = \overline{3x92y}$ soit divisible par 3 et 5. (0, 5pt)

4) Détermine le reste de la division euclidienne par 7 de $N = 19^{52} \times 23^{41}$. (0, 5pt)

5) a. Démontre que le carré de tout nombre impair est congru à 1 modulo 8. (0, 5pt)

b. Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $8x + 1 = y^2$. (0, 5pt)

6) a) Résous dans $\mathbb{Z}$: $\begin{cases} 5x \equiv 1[7] \\ 3x \equiv 4[13] \end{cases}$. (1pt)

b) Résous dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation : $3x^2 + 6x + 5 = 0$. (0, 5pt)

c) Résous dans $\mathbb{Z}$: $6x \equiv 3[15]$. (0, 5pt)

Exercice 2 : -----[4 points]

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points $A(2 - 4i)$; $B(-i)$; $M(z)$ et $M'(z')$ avec

$$z' = \frac{-iz - 2 + 4i}{z + i}; \quad z \neq -i$$

1. Exprime les coordonnées $(x'; y')$ de M' en fonction de celles $(x; y)$ de M . (1pt)

2. Détermine et représente l'ensemble des points M tels que :

a. z' soit un réel. (0, 5pt)

b. z' soit un imaginaire pur. (0, 5pt)

c. $|z'| = \frac{2}{3}$ (0, 5pt)

3. On pose $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$.

Vérifie que $ZZ' = -3 + 4i$ puis calcule $|ZZ'|$. (0, 75pt)

4. a. Détermine l'ensemble des points M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon $r > 0$. (0, 5pt)

b. Détermine r pour que M et M' soient sur le même cercle. (0, 25pt)

Problème :**[10 points]**

Les parties A, B, C et D sont indépendantes.

- A. Dans un lycée, un groupe d'élèves, composé de plus de garçons que de filles, a dépensé 700 pièces de 100 francs lors d'une fête de fin d'année. Les garçons ont dépensé 14 pièces chacun et les filles 11 pièces chacune.

Détermine le nombre de garçons et le nombre de filles qu'il y avait dans le groupe. (2pts)

- B. 1. Soit $n = \overline{14EF6}^{16}$.

a) Ecris n dans le système de base 4 sans l'écrire dans le système décimal. (0, 5pt)

b) Ecris n dans le système décimal. (0, 5pt)

2) a) Décompose 85750 en produit de facteurs premiers puis détermine le nombre de diviseurs positifs de 85750. (0, 5pt)

b) Détermine l'ensemble des diviseurs positifs de 85750 premiers avec 7. (0, 5pt)

c) Détermine les couples $(x; y)$ d'entiers naturels tels que :

$$m^3 + 722d^3 = 85750 \text{ où } m = \text{PPCM}(x; y) \text{ et } d = \text{PGCD}(x; y). \text{ (1pt)}$$

C. 1. Soit n un entier naturel. On pose $u = 5n + 1$; $v = 2n + 4$ et $\delta = \text{PGCD}(u; v)$.

a) Détermine les valeurs possibles de δ . (0, 5pt)

b) Détermine l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels $\delta = 18$. (0, 5pt)

c) Détermine l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels $\delta = 1$. (0, 5pt)

2. Résous dans $\mathbb{N}^2$:

a) $\begin{cases} \text{PGCD}(a; b) = 14 \\ \text{PPCM}(a; b) = 168 \end{cases} \text{ (0, 75pt)}$

b) $\begin{cases} \text{PPCM}(x; y) = 210 \\ x^2 + y^2 = 1096 \end{cases} \text{ (0, 75pt)}$

D. Soit a et b deux entiers naturels non nuls. On appelle « réseau » associé aux entiers a et b , ce qu'on note $\mathcal{R}_{a,b}$, l'ensemble des points du plan muni d'un repère, dont les coordonnées (x, y) sont des entiers naturels vérifiant les conditions : $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$.

1. a) Donne tous les points $M(x, y)$ du réseau $\mathcal{R}_{8,8}$ vérifiant : $x \equiv 2[3]$ et $y \equiv 1[3]$. (0, 5pt)

b) Détermine les points $M(x, y)$ du réseau $\mathcal{R}_{5,5}$ vérifiant : $x \equiv y[3]$. (0, 25pt)

2. On considère l'équation $(E) : 7x - 4y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Détermine un couple d'entiers relatifs (x_0, y_0) solution de (E) en utilisant l'algorithme d'Euclide. (0, 5pt)

b) Résous l'équation (E) dans $\mathbb{Z}^2$. (0, 5pt)

c) Détermine la solution (x, y) de (E) pour laquelle le point $M(x, y)$ correspondant appartient au réseau $\mathcal{R}_{4,7}$. (0, 25pt)