

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES**Classe : T.S.E****Date : 18/12/25****Coef : 5****Durée : 3h****Exercice 1**

(5 pts)

1. Démontrer par récurrence ou par congruence les propositions suivantes :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 1 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n - 1)^3 = 2n^4 - n^2$

b) $\forall n \in \mathbb{N} ; 9^{n+1} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11

2. On pose $PGCD(x; y) = d$ et $PPCM(x; y) = m$. Résous dans $\mathbb{N}^2$, les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x \cdot y = 1008 \\ m = 168 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 346 \\ m = 165 \\ x < y \end{cases}$

3. Ecris dans le système binaire les nombres : 127 ; 2026 ; $\overline{DAOODA}^{16}$ (pour DAOODA on pourra poser $16 = 2^4$; $10 = 2^3 + 2$ et $13 = 2^3 + 2^2 + 1$).

Exercice 2

(5 pts)

I. Dans le cadre du renforcement de la sécurité nocturne, la municipalité a mis en place un dispositif de surveillance régulier à certains carrefours stratégiques de la commune.

Un carrefour stratégique est surveillé par trois véhicules de patrouille nocturne, notés **V1**, **V2** et **V3**.

Chaque véhicule passe par le carrefour à des intervalles réguliers.

- ❖ Le véhicule **V1** passe par le carrefour toutes les **18 minutes** ;
- ❖ Le véhicule **V2** passe par le carrefour toutes les **45 minutes** ;
- ❖ Le véhicule **V3** passe par le carrefour toutes les **2 heures 30 minutes** ;

À minuit (00 h 00), les trois véhicules passent simultanément par le carrefour.

1. Trouve les instants (en minutes après minuit) où les passages sont simultanés pour :

- a) V1 et V2 ;
- b) V1 et V3 ;
- c) V2 et V3 ;
- d) V1, V2 et V3.

2. A partir de quelle heure (l'heure et la minutes) tous véhicules se retrouvent dans le carrefour.

II. Le père de Djénèbou entreprend la rénovation du sol de sa cour de forme rectangulaire, destinée à accueillir diverses activités familiales.

Dans le cadre de ces travaux, il décide de commencer par le revêtement du sol, dont les dimensions sont : **14,40 m** et **8,70 m**.

Pour la réalisation du chantier, il fait appel à un technicien en bâtiment, chargé de proposer une solution adaptée. Le sol doit être entièrement recouvert de pavés carrés, sans aucune découpe, afin d'éviter les pertes de matériaux et les coûts supplémentaires.

Le fournisseur contacté dispose de trois types de pavés carrés, de côtés respectifs : **18 cm; 25 cm; 30 cm**.

Chaque type de pavés est livré en paquets de **12 pavés** et en paquets de **20 pavés**.

Le père de Djénèbou exige :

- ❖ Qu'aucun pavé ne soit découpé lors du pavage ;
- ❖ que le nombre exact de paquets de **12** et de paquets de **20** à acheter soit déterminé avec précision.

Le technicien du chantier affirme que les pavés de côté **30 cm** sont les plus adaptés pour satisfaire la première condition.

Compte tenu de ses études en arithmétique, Djénèbou est sollicitée pour vérifier cette affirmation et participer activement aux calculs nécessaires au bon déroulement du chantier.

1. Vérifier si le technicien du chantier a raison ou pas.
2. En supposant qu'il a raison, déterminer le nombre de paquets de **20 pavés** et le nombre de paquets de **12 pavés** à commander, sachant que le nombre de paquets de **20** est strictement supérieur à **66**.

Problème _____ (10 pts)

Partie A :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère le polynôme complexe :

$$p(z) = z^4 + (i - 11)z^3 + (43 - 11i)z^2 - (65 - 43i)z - 65i$$

1. Montre que p admet une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
2. Montre que p admet une racine réelle z_1 que l'on déterminera.
3. Détermine toutes les racines dans $\mathbb{C}$ de p .

Partie B :

Soient A, B, C, D et E les points d'affixes respectives : $3 + 2i$; $3 - 2i$; $-i$; 5 et $1 + 2i$.

1. Place les points A, B, C, D et E .
2. Détermine la nature des triangles ABD et ABE .
3. Démontre que les points B, A, E et C appartiennent au cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre I et de rayon r .
4. Construis le cercle $(\mathcal{C})$.

Partie C :

Soit $F(4; -1)$. S est la similitude directe de centre C qui transforme A en F .

1. Détermine l'écriture complexe de S puis détermine son rapport et son angle.
2. Détermine l'image du triangle ABD par S .
3. Montre que le point F appartient-il au cercle $(\mathcal{C})$?
4. Soit $(E) : z^2 + (10 \cos \alpha - 4)z - 20 \cos \alpha + 29 = 0$ où $\alpha \in]0; \pi[$.
 - a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
 - b) Les points images des solutions de (E) appartiennent-ils à $(\mathcal{C})$?

BONNE CHANCE !!!!