

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1° On donne dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation () :

$$z^3 + (1+i)z^2 + (4-i)z + 12 - 6i = 0$$

a-) Montrer que () admet une solution réelle qu'on notera z_1

b-) Achever la résolution de l'équation (). On désignera par z_2 et z_3 les autres solutions de () avec $\text{Re}(z_2) < \text{Re}(z_3)$.

2° A, B et C sont les points de d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 . Placer les points A, B et C. Quel est la nature du triangle ABC ?

3° On considère la transformation h de dans qui à tout point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que :
$$\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y - 2 \end{cases}$$

z et z' étant les affixes respectives de M et M'

Exprimer z' en fonction de z . Donner la nature de la transformation h et préciser ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 2 :

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition. Ce laboratoire met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : « La population testée comporte 50% d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99% des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1% des cas ».

On note M l'événement « l'animal est malade » et T l'événement « le test est positif ».

1° Déterminer les probabilités $p(M)$, $p(T/M)$ et $p(T/\bar{M})$ où $\bar{M}$ est l'événement contraire de M .

2° En déduire la probabilité $p(T)$. On remarquera que $T = (M \cap T) \cup (\bar{M} \cap T)$.

3° Le laboratoire estime qu'un test est fiable, si sa valeur prédictive, c'est -à-dire la

probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999. Ce test est-il fiable ?

PROBLÈME :

A-// .On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 8(e^{-x} - e^{-2x})$.

1°/ Démontrer que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}}$

2°/ Démontrer que, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{8(2 - e^x)}{e^{2x}}$; f' désignant la fonction dérivée de f . En déduire le signe de $f'(x)$.

3°/ a-) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Donner une interprétation graphique du résultat

b-) Déterminer la limite lorsque x tend vers $-\infty$ de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement ce résultat.

4°/ Donner le tableau de variation de f .

5°/ Tracer la courbe représentative () de f dans un repère orthogonal (unités : 4 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées).

B-//.On injecte à l'instant $t = 0$ une substance dans le sang d'un animal. A l'instant t (t positif exprimé en secondes), la concentration y de substance injectée est :

$$y = 8(e^{-t} - e^{-2t}).$$

On appelle «concentration» le rapport entre la quantité du liquide injecté et la quantité du sang qui le contient.

1°) En utilisant les résultats de la partie A-/, donner le tableau de variation de la concentration en fonction du temps t , t positif exprimé en secondes.

2°) Au bout de combien de temps la concentration est-elle maximale ? On donnera une valeur approchée par défaut de ce résultat au centième de secondes.

3°) Calculer au bout de combien de temps la concentration « retombe » au quart de sa valeur maximale.

4°) Calculer une valeur approchée de $f(9)$.