

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES

DUREE : 3H

TSE

COEF : 4

EXERCICE 1: (5 points)

A- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

1. Calcule I_0 **0.5pt**

2. a- Montre en intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ **1pt**

b- En déduire I_1 et I_2 **0.75pt**

B- Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{x^2 - 6x + 18}{x(x-3)^2}$

1- Détermine le domaine de définition Dh **0.5pt**

2- Montre que pour tout $x \in Dh$, $h(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{(x-3)^2}$ **0.75pt**

3- Déduis-en la primitive H sur $] -\infty, 0[$ qui s'annule en 2 (On prendra $a = 2$; $b = -1$; $c = 3$) **1pt**

4- En déduire $K = \int_1^2 h(x) dx$ **0.5pt**

EXERCICE 2: (5points)

1) Résous dans $\mathbb{R}$

a) $\frac{\ln(1-x)}{1-\log 2x} \geq 0$ **1pt**

b) $(\log_3 x)^4 - 5(\log_3 x)^2 + 4 = 0$ **0.75pt**

c) $\left[\log_{\sqrt[3]{2}}(1-x) \right]^2 - 9 \log_{\sqrt[3]{2}}(1-x) + 18 < 0$ **1pt**

2) Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} \log_2(2x)^3 - \log_5(y)^4 = -11 \\ -2\log_2(2x)^2 + \log_5(y) = 6 \end{cases}$ **0.75pt**

3) Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x - \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

a- Montre que $\forall x \in [1, 2]$; $\frac{3}{2} \leq g'(x) \leq 2$ **0.75pt**

b- Soit $t \in [1, 2]$ Montre en utilisant l'inégalité des accroissements finis que

$\forall x \in [1, t]$; $\frac{3t}{2} - \frac{1}{2} \leq g(t) \leq 2t - 1$ **0.75pt**

PROBLEME : (10 points)

PARTIE A : Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$ On désigne par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe

représentative dans un repère orthonormé $(\mathbf{0}, \vec{i}, \vec{j})$

- 1- Détermine le domaine de définition de Df **0.5pt**
- 2- Calcule les limites de f en 0^+ , en e^- , e^+ et en $+\infty$ puis interprète les résultats. **1pt**
- 3- Montre que pour tout $x \in Df$, $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ **0.75pt**
 - a- En déduire le sens de variations de f **0.5pt**
 - b- Dresse le tableau de variation de f sur $]0, e[\cup]e, +\infty[$ **0.5pt**

PARTIE B : Soit g la fonction définie par $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$.

- 1- Etudie les variations de g et dresse le tableau de variation. **1.75pt**
- 2- a-/ Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]2, 3[$ puis en déduire un encadrement de α à 10^{-1} près. **0.75pt**
 - b-/ Calcule $g(1)$ puis en déduire le signe de $g(x)$. **0.75pt**
- 3- a-/ Vérifie que $\forall x \in]0, e[\cup]e, +\infty[; f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ **0.5pt**
 - b-/ Montre que la courbe $(\mathcal{C}f)$ coupe la droite $(\Delta) : y = x$ en deux points puis en déduire la position relative de $(\mathcal{C}f)$ et (Δ) **0.75pt**
- 4- Construire la courbe $(\mathcal{C}f)$ et la droite (Δ) dans le repère. **1pt**
- 5- Soit D le domaine du plan défini par $D = \left\{ M(x, y) \in (\mathcal{P}); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{cases} 1 \leq x \leq \alpha \\ f(x) \leq y \leq x \end{cases} \right. \right\}$
 - a- Hachure le domaine D et en donner l'interprétation graphique. **0.5pt**
 - b- En déduire en cm^2 l'aire de D . **0.75pt**