

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES

Problème : ----- [20 points]

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x - 1| - \frac{2}{|x+2|-1}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. a) Détermine l'ensemble de définition de f . (0,5 pt)
- b) Ecris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue. (1 pt)
2. a) Etudie la continuité de f en -2 et en 1 . (1 pt)
- b) Etudie la dérivabilité de f en -2 et en 1 puis donne une interprétation graphique des résultats obtenus. (2 pts)
- c) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. (1 pt)
- d) Détermine les équations des asymptotes à (C) . (1 pt)
3. Etudie le signe de $f'(x)$ puis dresse le tableau de variation de f . (4 pts)
4. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$.
 - a) Montre que g réalise une bijection de $]1; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera puis dresse le tableau de variation de sa bijection réciproque g^{-1} . (1 pt)
 - b) Calcule $(g^{-1})'(\frac{1}{3})$. (1,5 pt)
 - c) Détermine une équation de la tangente à la courbe de g^{-1} au point d'abscisse $\frac{1}{3}$. (0,5 pt)
 - d) Démontre que l'équation $g(x) = 1$ admet une solution unique $\alpha \in]1; +\infty[$ puis donne un encadrement de α à 10^{-1} près. (1 pt)
 - e) Exprime $(g^{-1})'(1)$ en fonction de α . (0,5 pt)
 - f) Détermine la valeur exacte de α puis celle de $(g^{-1})'(1)$. (0,5 pt)
 - g) Montre que $\forall x \in [3; 5], \frac{19}{18} \leq g'(x) \leq \frac{9}{8}$. (1 pt)
 - h) Démontre en utilisant l'inégalité des accroissements finis que :
 $\forall x \in [3; 5], \frac{1}{24}(27x - 47) \leq g(x) \leq \frac{1}{18}(19x - 29)$ (1,5 pt)
5. Construis la courbe (C) de f puis déduis-en la courbe (C') de g^{-1} . (2 pts)