

Devoir n°5 de Mathématiques

Classe : TSE

17 Mars 2026

Durée : 3H

Coef : 05

- ☛ Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous obligatoires. Il comprend deux pages.
- ☛ La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- ☛ L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice 1 : -----[6 points]

A. 1) On pose pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$; $f(t) = \frac{t}{(t^2-1)^2}$.

Détermine une primitive F de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$. (0,5 pt)

2) On pose pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$; $g(t) = \frac{1}{t(t^2-1)}$.

Détermine les trois nombres réels a, b et c tels que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$, on ait :

$g(t) = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}$. Déduis-en une primitive G de g sur l'intervalle $]1; +\infty[$. (1,5 pt)

3) A l'aide d'une intégration par parties, calcule, pour $x > 1$; $J(x) = \int_2^x \frac{t \ln t}{(t^2-1)^2} dt$. (1 pt)

B. On considère l'intégrale $A = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

1) Explique pourquoi $A = 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$. (0,5 pt)

2) a) Etablis que $\forall x \in [0; 1]; -\frac{x}{2} + 1 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq -\frac{x^2}{2} + 1$. (0,5 pt)

b) Déduis-en un encadrement de $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ puis une valeur approchée de A . (0,5 pt)

3) Détermine une valeur approchée de A par la méthode de rectangle en partageant l'intervalle $[0; 1]$ en 5 intervalles de même amplitude. (1 pt)

4) Montre que $A = \frac{\pi}{2}$ par la méthode de changement de variable. (0,5 pt)

Exercice 2 : -----[4 points]

On pose $I_{p,n} = \int_0^1 x^p (1-x)^n dx$ où n et p sont deux entiers naturels.

1. Calcule $I_{p,0}$ et $I_{p,1}$. (1 pt)

2. Calcule $I_{0,n}$ et déduis - en $I_{1,n}$. (1,5 pt)

3. Montre que $I_{p,n} = I_{n,p}$ en faisant un changement de variable affine. (0,5 pt)

4. Etablis pour $n \geq 1$, la relation : $I_{p,n} = \frac{n}{p+1} I_{p+1,n-1}$. (1 pt)

Problème : -----[10 points]

Partie A : Soit l'application u définie de $I =]0; \pi[$ dans $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 2x - \frac{\cos x}{\sin x}$

1. Etudie les variations de u . (1,5 pt)

2. Déduis-en que l'équation $u(x) = 0$ admet dans l'intervalle I une solution unique α appartenant à $\left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4} \right[$. (0,5 pt)

3. Etudie le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x . (0,5 pt)

Partie B : Soit l'application f définie de $[-\pi; \pi]$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x \cos^2 x$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$; unité 1cm.

1. Donne un encadrement de $f(\alpha)$. (0,5 pt)

2. Etudie la parité de l'application f . Déduis-en que le domaine d'étude de la fonction f est $E = [0; \pi]$. (0,5 pt)

3. Etudie les variations de f sur E . (On pourra écrire $f'(x)$ en fonction de $u(x)$). (2 pts)

4. a. Détermine les tangente (T_0) et (T_1) à la courbe de f respectivement aux points d'abscisses 0 et π . (1 pt)

b. Détermine la position de (C) par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$. (0,5 pt)

c. Construis (C) sur $[-\pi; \pi]$ et les tangentes (T_0) et (T_1) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (0,75 pt)

5. Détermine l'aire A , en cm^2 , de la région du plan limitée par (C) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \pi$. On donnera la valeur exacte et une valeur approchée de A à 10^{-2} près. (1 pt)

Partie C : Soit g la fonction définie sur $K = \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$ par $g(x) = f(x)$.

1. Démontre que g détermine une bijection de K sur un intervalle J à préciser. (0,25 pt)

2. Soit h la bijection réciproque de g et (τ) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

a. La fonction h est-elle dérivable en 0 ? (0,5 pt)

b. Dresse le tableau de variations de h . (0,25 pt)

c. Construis (τ) dans le même repère que (C) . (0,25 pt)