

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : -----[5 points]

Détermine une primitive de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \sin(3x - 4) - 6 \cos\left(\frac{3x}{5}\right); I = \mathbb{R}$

2. $f(x) = \frac{7x^5 - x^4 + 4x^2 - 5x + 1}{x^4}; I =]0; +\infty[$

3. $f(x) = \frac{\cos(2x)}{\sin^5(2x)}; I =]0; \frac{\pi}{4}[$

4. $f(x) = \sin\left(\frac{3}{4}x\right) \cos^5\left(\frac{3}{4}x\right); I = \mathbb{R}$

5. $f(x) = \cos^4(3x); I = \mathbb{R}$

6. $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-6x+11}}; I = \mathbb{R}$

7. $f(x) = \tan^{11}x + \tan^9x; I =]0; \frac{\pi}{2}[$

8. $f(x) = \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}; I =]0; \frac{\pi}{2}[$

9. $f(x) = \frac{1}{\sin^4 x}; I =]0; \frac{\pi}{2}[$

10. $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{(x+1)^2(x^2+2x+5)^{10}}; I =]-1; +\infty[$

Exercice 2 : ----- Les parties A, B et C sont indépendantes -----[5 points]

A. Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{75x^2 + 70x + 21}{(5x^2 + 3x)^2}$.

1) Détermine le domaine de définition D_f de f . (0,5pt)

2) Détermine les nombres réels a, b et c tels que : $\forall x \in D_f; f(x) = \frac{ax+b}{(5x^2+3x)^2} + \frac{c}{x^2}$. (0,5pt)

3) Déduis-en la primitive F de f sur $]-\infty; -\frac{3}{5}[$ qui s'annule en -1 . (1pt)

B. On donne $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x - 3) \cos^2(2x) dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x - 3) \sin^2(2x) dx$

1) Calcule $I + J$ et $I - J$. (1pt)

2) Déduis-en les valeurs de I et J . (0,5pt)

C. On considère les intégrales I_n et J_n définies par :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx \text{ et } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^+;$$

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x (\sin x)^n dx \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^+.$$

1) Calcule J_0 et J_n en fonction de n . (0,75pt)

2) Calcule $I_2 - I_0$ puis démontre que $I_{n+2} - I_n = \frac{-1}{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$. (0,75pt)

Problème ----- Les parties A et B sont indépendantes ----- **[10 points]**

Partie A

Pour tout entier naturel non nul n , on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{2x+1} dx$ et $I_0 = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$.

- 1) a) Calcule I_0 . (0,5pt)
- b) Calcule I_1 en effectuant un changement de variable. (1pt)
- c) A l'aide d'une intégration par parties, démontre que : $(3 + 2n)I_n + nI_{n-1} = \sqrt{3}$. (1pt)
- d) Déduis-en I_2 et I_3 .

2) Compare x^n et x^{n+1} lorsque $0 \leq x \leq 1$. Déduis-en que $I_{n+1} \leq I_n$. (0,75pt)

3) a) En procédant par encadrement, montre que : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{3}}{n+1}$. (0,75pt)

b) Détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. (0,5pt)

4) a) En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis montre que :

$$\forall x \in [0; 1]; 0 \leq \sqrt{3} - \sqrt{2x+1} \leq 1-x \quad (1pt)$$

b) Déduis-en que : $\frac{-1}{(n+1)(n+2)} + \frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{3}}{n+1}$. (1pt)

c) Détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$. (0,5pt)

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x$.

1. Montre que l'on peut restreindre l'étude de h à $[0; \pi]$. (0,5pt)
2. Montre que $\forall x \in [0; \pi], h'(x) = \cos x \cos 2x$. (0,5pt)
3. Dresse le tableau de variation de h sur $[0; \pi]$. (1 pt)
4. Trace la courbe représentative de h sur $[-\pi; \pi]$. (1 pt)