

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES

SÉRIE : TSE

EXERCICE 1 :

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y' + 4y = 4x^2 - 8x + 2$

1°/ Montrer qu'il existe une unique fonction polynôme g du second degré solution de (E).

2°/ a) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si, la fonction $(f - g)$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'' - 4y' + 4y = 0$

b) Résoudre l'équation (E') ; en déduire les solutions de (E).

3°/ Déterminer la solution f de (E) vérifiant les conditions : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

EXERCICE 2 :

1. Soit la suite (U_n) définie par : $U_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n ; $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

b) Démontrer que la suite (U_n) est convergente.

2.a) Démontrer que, pour réel x strictement positif $\frac{1}{1+x} \leq \ln(1+x) - \ln x \leq \frac{1}{x}$.

b) Pour tout entier naturel n , on pose : $V_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$.

Déduire de a) que $\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq V_n \leq \ln(2)$ et que la suite (V_n) est convergente et donner sa limite.

PROBLÈME :

A) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$. On note $(\vec{i}, \vec{j})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 1cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1.a) Déterminer la limite de f en $-\infty$. (On pourra poser $h = e^x$).

b) Vérifier que, pour tout réel x ; $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1+e^{-x})$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

En déduire que la courbe () admet deux asymptotes que l'on précisera.

2. g est la fonction numérique définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par $g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$.

Démontrer que g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$.

3.a) Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(e^x)$, f' désignant la fonction dérivée de f .

b) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation. Tracer la courbe ().

B) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

1. Etudier le sens de variation de la fonction F .

2.a) Vérifier que, pour tout nombre réel, $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$ et calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$

b) En déduire à l'aide d'une intégration par parties le calcul de $F(x)$.

c) Vérifier que $F(x)$ peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$(1) \quad F(x) = x - \ln(1+e^x) - f(x) + 2\ln 2$$

$$(2) \quad F(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2$$

3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} [F(x)-x]$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.