

<i>Devoir n°6 de Mathématiques</i>			
Classe : TSE	22 Avril 2026	Durée : 3H30	Coef : 05

- ☛ Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous obligatoires. Il comprend deux pages.
- ☛ La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- ☛ L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice 1 : -----[4 points]

Soit φ la fonction définie sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ par $\varphi(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ et $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x) dx$

1) Étudie les variations de φ puis détermine l'image par φ de l'intervalle $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$. **(1pt)**

2) a) Détermine les nombres réels a et b tels que pour tout x de $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ on ait :

$$\frac{1}{1-x} = a + x + \frac{bx^2}{1-x}. \quad \textbf{(0, 5pt)}$$

b) Dédus en que $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x) e^{-x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \varphi(x) dx$. **(0, 5pt)**

c) Calcule au moyen d'une intégration par parties le réel $J = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x) e^{-x} dx$. **(1pt)**

d) Démontre que : $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \varphi(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$. **(0, 5pt)**

e) Dédus en une valeur décimale approchée de I à 0,01 près. **(0, 5pt)**

Exercice 2 : -----[4 points]

Les parties A et B sont indépendantes

A. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel non nul n on a : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

1) Montre que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$. **(1pt)**

(On pourra appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction qui à x associe $\ln x$ sur l'intervalle $[n; n+1]$).

2) Dédus-en que pour tout entier naturel non nul n on a : $u_n \geq \ln(n+1)$ puis calcule la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$. **(1pt)**

B. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+1} \cos 2x dx$.

1. Calcule u_0 à l'aide d'une intégration par parties. **(1pt)**

2. A l'aide d'une double intégration par parties, démontre que :

$$u_n = -\frac{1}{4}(n+1) \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - \frac{1}{4}n(n+1)u_{n-2} \quad \textbf{(1pt)}$$

Problème : -----[12 points]

Partie A : (6pts)

Pour tout entier naturel n strictement positif on donne f_n la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$. On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

- 1) Détermine la fonction dérivée f'_n de f_n et donne l'expression de f'_n en fonction de f_n et f_{n+1} . **(0, 75pt)**
- 2) Étudie les variations de f_n et ses limites éventuelles en $-\infty$; -1 ; $+\infty$ (On distinguera le cas n pair et impair). **(2, 5pts)**
- 3) Démontre que toutes les courbes (C_n) passent par un même point fixe. **(0, 5pt)**
- 4) Détermine la limite de $\frac{f_n(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour toutes les courbes (C_n) ? **(0, 75pt)**
- 5) Trace sur deux figures distinctes les courbes (C_1) et (C_2) . **(1, 5pt)**

Partie B : (2, 5pts)

On donne $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx, n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Démontre que la suite (I_n) est décroissante. **(0, 5pt)**
- 2) Démontre que pour tout $n \geq 2$; $\frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$. Déduis-en $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. **(0, 75pt)**
- 3) En utilisant la question A)1) trouve une relation entre I_n et I_{n+1} . **(0, 5pt)**
- 4) Démontre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_{n+1} = 1$. Déduis-en que la suite $(n \times I_n), n \in \mathbb{N}^*$ converge et détermine sa limite. **(0, 75pt)**

Partie C : (3, 5pts)

Dans cette partie on donne $n = 2$

- 1) Démontre que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α et que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. **(0, 75pt)**
- 2) Étudie les variations de f'_2 dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et déduis-en que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ on a :
 $-0,25 \leq f'_2(x) \leq 0$ et $|f'_2(x)| \leq \frac{1}{4}$. **(1pt)**
- 3) Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f_2(u_n) \end{cases}$
 - a) Démontre en utilisant la question C)2°) que pour tout entier n on a :
 $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$ **(0, 75pt)**
 - b) Déduis-en que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α . **(0, 75pt)**
 - b) Déterminer p pour que u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près. **(0, 25pt)**