

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : -----[4 points]

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition. En l'an 2000 l'effectif était à mille (1000).

L'effectif de cette population évolue par rapport au temps t et peut être approché par une fonction f . Le temps t est exprimé en années à partir de 2000. La fonction f est dérivable, strictement positive sur l'intervalle $[2000; +\infty[$ et est solution de l'équation différentielle : $(E_1): y'(t) + \frac{1}{200}y(t) = \frac{200}{t^2} + \frac{1}{t}$.

1) Vérifie que la fonction h définie sur l'intervalle $[2000; +\infty[$ par : $h(t) = \frac{200}{t}$ est une solution de (E_1) .

2) Résous l'équation différentielle : $(E_2): y'(t) + \frac{1}{200}y(t) = 0$.

3) a) Démontre qu'une fonction g est solution de (E_1) si et seulement si $g - h$ est solution de (E_2) .

b) Déduis-en les solutions de (E_1) .

c) Sachant que $f(2000) = 1000$, vérifie que : $\forall t \in [2000; +\infty[, f(t) = 999,9e^{\left(10 - \frac{t}{200}\right)} + \frac{200}{t}$.

d) Détermine le nombre d'individus de cette population animale en 2020. (On donnera le résultat à 0)

Exercice 2 : -----[4 points]

A. f et g sont deux fonctions numériques à variable réelle deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant le système d'équations différentielles : $(S) \begin{cases} f'(x) = f(x) + g(x) \\ g'(x) = -f(x) + g(x) \end{cases}$

1. Résous l'équation différentielle $(E): y'' - 2y' + 2y = 0$.

2. Utilise le système (S) pour montrer que f est solution de (E) .

3. Résous le système (S) puis déduis-en la solution particulière vérifiant $f(0) = 2$ et $g(0) = -1$.

Problème : -----[12 points]

A) Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$.

1. Calcule les limites de g aux bornes de son ensemble de définition D_g .

2. Étudie les variations de g , puis dresse son tableau de variation.

3. a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur D_g et que $1,8 < \alpha < 1,9$. b) Déduis-en le signe de $g(x)$ sur D_g .

B) Soit la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques : 2 cm en abscisse, 4 cm en ordonnée.

1) Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$ puis interprète graphiquement les résultats.

2) Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} g(x)$ et déduis-en les variations de f .

4) Démontre que $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$.

5) Dresse le tableau de variation de f .

6) Construis (C) .

C) 1) Démontre que pour tout $x \geq 1, \frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$.

2) On pose $I_1 = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x} dx$ et $I_2 = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2} dx$.

a) Calcule I_1 , puis en utilisant une intégration par parties calcule I_2 .

b) Déduis-en un encadrement de $K = \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx$.

3) Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \frac{3}{2}$.

a) Exprime $\mathcal{A}$ en fonction de K .

b) Déduis-en un encadrement de $\mathcal{A}$ en cm^2 .