

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : -----[5 points]

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 3 \text{ cm}$; $BC = 5 \text{ cm}$.

1. Détermine et construis le barycentre G des points pondérés $(A; 2)$, $(B; -1)$, $(C; 3)$. (1pt)
2. Détermine et construis l'ensemble (E_1) des points M du plan vérifiant :

$$\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|. \quad (1\text{pt})$$
3. Détermine et construis l'ensemble (E_2) des points M du plan vérifiant :

$$\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|. \quad (1\text{pt})$$
4. Détermine et construis l'ensemble (E_3) des points M du plan vérifiant :

$$2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 24. \quad (1\text{pt})$$
5. Détermine et construis l'ensemble (E_4) des points M du plan vérifiant :

$$2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0. \quad (1\text{pt})$$

Exercice 2 : -----[3 points]

On pose $I_0 = \int_1^e x \, dx$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n \, dx$.

- 1) Calcule I_0 et I_1 . (0,5pt)
- 2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établis la relation : $2I_n + nI_{n-1} = e^2$ et déduis-en I_2 . (1pt)
- 3) Montre que la suite de terme général I_n est décroissante. (0,5pt)
- 4) Déduis de 2) et 3) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$. (0,5pt)
- 5) Calcule la limite de I_n et celle de nI_n . (0,5pt)

Problème : -----[12 points]

Partie A : (6pts)

Pour tout entier naturel n strictement positif, on considère la fonction numérique f_n de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$. On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

- 1) Détermine la fonction dérivée f'_n de f_n et donne l'expression de f'_n en fonction de f_n et f_{n+1} . (0, 75pt)
- 2) Étudie les variations de f_n et ses limites éventuelles en $-\infty$; -1 ; $+\infty$ suivant la parité de n . (2, 5pts)
- 3) Démontre que toutes les courbes (C_n) passent par un même point fixe. (0, 5pt)
- 4) Détermine la limite de $\frac{f_n(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour toutes les courbes (C_n) ? (0, 75pt)
- 5) Trace dans le repère les courbes (C_1) et (C_2) . (1, 5pt)

Partie B : (2, 5pts)

On donne $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx, n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Démontre que la suite (I_n) est décroissante. **(0, 5pt)**
- 2) Démontre que pour tout $n \geq 2$; $\frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$. Déduis-en $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. **(0, 75pt)**
- 3) En utilisant la question A)1), détermine une relation entre I_n et I_{n+1} . **(0, 5pt)**
- 4) Démontre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_{n+1} = 1$. Déduis-en que la suite $(n \times I_n), n \in \mathbb{N}^*$ converge et détermine sa limite. **(0, 75pt)**

Partie C : (3, 5pts)

Dans cette partie on prend $n = 2$.

- 1) Démontre que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α et que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. **(0, 75pt)**

- 2) Étudie les variations de f_2' dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et déduis-en que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ on a : $|f_2'(x)| \leq \frac{1}{4}$. **(1pt)**

- 3) Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f_2(u_n) \end{cases}$

- a) Démontre en utilisant la question C)2°) que pour tout entier n on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha| \quad \textbf{(0, 75pt)}$$

- b) Déduis-en que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis détermine la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. **(0, 75pt)**

- b) Détermine le plus petit entier naturel p pour que u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près. **(0, 25pt)**