



Evaluation sommative N°9

Situation 1 : (8pts)

1. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $4^{x-7} = 3^x$.
2. Étudie puis représente graphiquement les fonctions $f(x) = 5^x$ et $g(x) = -0,6^x$.
3. Étudie puis représente graphiquement les fonctions $f(x) = x^{2,5}$ et $g(x) = -x^{0,7}$.
4. Détermine $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(x+1)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{x^2}$ en utilisant le développement limité.

Situation 2 : (12pts)

Partie A

Soit la fonction numérique g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1-x)e^{2-x} + 1$.

- 1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2) Étudie le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.
- 3) Démontre que l'équation $g(x) = 1$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.
- 4) en déduis le signe de la fonction $h(x) = g(x) - 1$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{2-x} + 1$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

- 1) a) Calcule la limite de $f(x)$ en $+\infty$. Que peut-on déduire ?
b) Calcule la limite de $f(x)$ et celle de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$. Interprètes graphique le résultat.
- 2) a) Justifie que f est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
b) En déduis le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.
- 3) a) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point $A(2; 3)$.
b) Étudie les positions relatives de (C) et (T). Que représente le point A pour la courbe (C).
c) Montre que $(\forall t \in]-\infty; 2]) ; (\forall x \in]-\infty; 2]) f(x) \leq f'(t)(x-t) + f(t)$
- 4) Construis (T) et (C).

Partie C

Pour tout entier naturel n on pose $u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$.

- a) Calcule u_0, u_1 et u_2 .

On donnera des valeurs décimales approchées à 0,1 près de u_0, u_1 et u_2 .

- b) Interprète graphiquement u_n .

c) Montre que, pour tout $n \geq 0$, $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$.

En déduis la monotonie de la suite (u_n) à partir de $n = 1$.

d) Détermine la limite de la suite (u_n) .