



Evaluation sommative N°10

Situation 1 : (12pts)

Une étude statistique étudie l'évolution d'une population bactérie qui semble en voie de disparition dans le sang d'un patient.

L'effectif de cette population évolue par rapport au temps t en heure et peut être modéliser par une fonction f . La fonction f est dérivable, strictement positive sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et est

solution de l'équation différentielle : $(E_1): y'(x) + y(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}$.

1) Soit g la fonction dérivable et définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2}{x}$.

Vérifie que g est une solution de (E_1) .

2) Résous l'équation différentielle $(E_2): y'(x) + y(x) = 0$.

3) a) Démontre qu'une fonction h est solution de (E_1) si et seulement si $h - g$ est solution de (E_2) .

b) Déduis-en les solutions de (E_1) .

c) Sachant que $f(1) = 3e + 2$ vérifie que : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = 3e^{-x+2} + \frac{2}{x}$.

d) Détermine le nombre d'individus de cette population de bactérie après 2 heures.

4) Etudie les variations de la fonction f .

5) Montre que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dont on donnera un encadrement de 10^{-2} près.

6) On pose $I_k = \int_2^k f(x) dx$.

a) Calcule I_5

b) Donne un encadrement de I_k pour tout $x \in [2; +\infty[$.

c) Donne une interprétation graphique de l'intégrale I_k .

d) Calcule $\lim_{k \rightarrow +\infty} I_k$.

Situation 2 : (8pts)

On donne la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 3 - 2 \ln x$.

1. Etudie les variations de la fonction f .

2. Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions.

3. Montre que la fonction $f(x)$ est solution des chacune des équations différentielles suivantes, puis en déduis l'ensemble solution de chaque équation :

a. $2y' + 3y = -\frac{4}{x} - 9 + 4x + 3x^2 - 6 \ln x$

b. $y'' - 3y' + 2y = \frac{2}{x^2} + \frac{6}{x} - 4 - 6x + 2x^2 - 4 \ln x$

c. $y'' + y = \frac{2}{x^2} - 1 + x^2 - 2 \ln x$

d. $y'' - 2y' + y = \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x} - 1 - 4x + x^2 - 2 \ln x$