



Evaluation sommative N°12

Situation 1 : (5pts)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 4u_n + 1 \end{cases}$$

1.

a. Représente graphiquement les trois premiers termes de la suite (u_n) .

b. Démontre que $u_n = -\frac{2}{3} \times 4^n - \frac{1}{3}$.

c. Etudie la convergence de cette suite.

2. Soit la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

a. Pour quelle valeur de a la suite (v_n) est-elle géométrique de raison 4 ?

b. Exprime $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ puis $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ en fonction de n .

Situation 2 : (8pts)

Soit la courbe (C_n) d'une fonction f_n définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne $f_n(x) = \frac{(1+\ln x)^n}{x}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

1. Etudie puis dresse le tableau de variation de la fonction f_n pour n paire et pour n impaire.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, Montre que les courbes (C_n) passent par deux points d'abscisses α et β a déterminé. ($\alpha < \beta$)

3. On donne la suite (I_n) définie par $I_n = \int_{\alpha}^{\beta} [f_n(x) - f_{n+1}(x)] dx$.

4. Calcule I_1 et I_2 . Donne une interprétation graphique des résultats.

5. Exprime I_n en fonction de n .

6. Etudie le sens de variation de (I_n) .

7. Etudie la convergence de la suite (I_n) .

8. Montre que cette suite est bornée.

Situation 3 : (7pts)

On administre à un patient un médicament par sérum. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.

Le but de cet exercice est d'étudier pour deux hypothèses, l'évolution de cette quantité heure par heure.

- 1) On effectue à l'instant $n = 0$ une injection de 20 ml de ce médicament. On estime que 30% du médicament est éliminé par heure. Pour tout entier naturel n , on note u_n la quantité de médicament en ml restante dans le sang au bout de n heures. Ainsi on a $u_0 = 20$.
 - a) Montre que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,7u_n$.
 - b) En déduis la nature et les éléments caractéristiques de la suite (u_n) .
 - c) Pour tout entier naturel n , donne l'expression de u_n en fonction de n .
 - d) Au bout de combien de temps la quantité de médicament restante dans le sang devient-elle inférieure à 5% de la quantité initiale ? justifie ta réponse.
- 2) On programme une machine de façon que :
 - A l'instant $n = 0$, elle injecte 18ml de médicament,
 - Toutes les heures, elle injecte 6 ml de médicament.

On estime que 30% du médicament présent dans le sang est éliminé par heure. Pour tout entier naturel n , on note V_n la quantité de médicament, en ml, présente dans le sang du patient au bout de n heure.

- a) Justifie que pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = 0,7V_n + 6$.
- b) Pour tout entier naturel n , on pose $W_n = V_n - 20$. Démontre que (W_n) est une suite géométrique dont on précisera sa raison et son premier terme.
- c) Détermine l'expression de W_n et de V_n en fonction de n .
- d) Calcule la limite de la suite (V_n) puis en donne une interprétation.