

Evaluation de mathématiques			
Classe : TSE	2025 – 2026	Durée : 3 heures	Coef : 05
Académie d'Enseignement de Gao (Lycée privé les Elites-Gao)			

Exercice 1 -----[5 points]

I/ $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} ; J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx ; K = \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx$

1. Soit la fonction φ définie sur $[0; 1]$ par $\varphi(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Montre que la dérivée $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et en déduis la valeur de I ; **(0, 5pt)**

2. a) Vérifie que : $I + J = K$; **(0, 5pt)**

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur K , Montre que $K = \sqrt{2} - J$.

(on pourra poser $K = \int_0^1 1 \times \sqrt{x^2+1} dx$) ; **(0, 5pt)**

c) En déduis les valeurs de J et de K . ; **(0, 5pt)**

II/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 + \cos x)e^{1-x}$.

1) Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) > 0$. **(0, 5pt)**

2) a. Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$. **(0, 5pt)**

b. En déduis que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $2 + \cos x + \sin x > 0$. **(0, 5pt)**

c. Montre que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. **(0, 5pt)**

3) a. Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$. **(0, 5pt)**

b. En déduis les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. **(0, 5pt)**

Exercice 2 -----[6,5 points]

I/ 1) Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ on considère les points :

$A(3; 1)$; $B(-1; 3)$ et $C(1; -3)$. Calcule les distances : AB^2 ; AC^2 ; BC^2 . **(0, 75pt)**

2) Détermine et construis le barycentre $G \{(A; 1) ; (B; 1) ; (C; 2)\}$ **(0, 75pt)**

3) Détermine et construis l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que

$$MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 60 \quad \textbf{(0, 5pt)}$$

4) Soit O le milieu du segment $[BC]$. Détermine et construis l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que $\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 2\|\vec{MB} + \vec{MC}\|$ **(0, 5pt)**

II/ 1) Résous l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + 5y = 0$. **(0, 75pt)**

2) En déduis la fonction f solution de (E) sachant que la courbe (C_f) de f admet

au point $K(0; 4)$ une tangente (T_0) parallèle à la droite d'équation $y = -x + \frac{1}{2}$ **(0, 75pt)**

III/ On se propose de calculer l'intégrale J définie par $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} dx$

1) Calcule les intégrales A et B tels que $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$ et $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ **(1pt)**

2) Détermine les réels a , b et c tel que $\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$ (1) ; **(0, 5pt)**

3) En posant $t = e^x$ dans l'égalité (1), calcule $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$ **(0, 5pt)**

- 4) a) A l'aide d'une intégration par partie, exprime J en fonction de I. **(0, 5pt)**
 b) En déduis la valeur de J. **(0, 5pt)**

Problème -----[8,5 points]

Partie A

On considère la fonction numérique f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Unité 3cm

1) a) Dresse le tableau de variation de f **(1pt)**

b) Construis la courbe (C_f) , on fera figurer la tangente au point d'abscisse 0 **(1pt)**

c) Calcule l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. (On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-3} près). **(0, 75pt)**

2) a) Montre que la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$ est strictement décroissante. **(0, 75pt)**

b) En déduis que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $[0; +\infty[$ et que l'on a : $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$. **(0, 75pt)**

3) a) Utilise le sens de variation de f pour montrer que $f(x)$ appartient à $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ pour $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ **(0, 5pt)**

b) Montre que $\forall u \in [0; 1], 0 \leq u(1 - u) \leq \frac{1}{4}$. En déduis que l'on a :

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \text{ (On pourra poser } u = e^{-x} \text{). } \textbf{(0, 75pt)}$$

Partie B

1) On considère la suite (U_n) définie par :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

a) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$; **(0, 75pt)**

b) Démontre en utilisant l'inégalité des accroissements finis que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$. En déduis : $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |U_0 - \alpha|$; puis $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.
 Quelle est la limite de (U_n) ? **(1, 5pt)**

2) Trouve le plus petit entier naturel k tel que $\frac{1}{2^{k+1}} = 10^{-3}$. En déduis une valeur approchée de α à 10^{-3} près. **(0, 75pt)**

NB : Parties A et B sont dépendantes