

Evaluation de mathématiques			
Classe : TSE	2025 – 2026	Durée : 3 heures	Coef : 05
Académie d'Enseignement de Gao (Lycée privé les Elites-Gao)			

Lis attentivement :

- Le sujet est composé de deux exercices et un problème tous obligatoires. Il comprend deux pages.
- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 -----[5 points]

A. Soit f la transformation du plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ définie analytiquement par : à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tels que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y + 2) \\ y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y) \end{cases}$$

- 1) On pose $Z = x + iy$ et $Z' = x' + iy'$. Montrer que $Z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}Z + 1$.
 - 2) On pose $O' = f(O)$. Vérifie que $O'M' = OM$.
 - 3) Détermine l'ensemble des points invariants par f .
- B. ABC est un triangle équilatéral de côté de longueur a , soit I le barycentre des points pondérés $(A, 1); (B, 2)$ et $(C, -2)$.
1. Détermine et construis I .
 2. Calcule IA^2, IB^2 et IC^2 en fonction de a .

Soit k un nombre réel.

- a) Détermine en fonction de k l'ensemble (Ω_k) des points M du plan tel que :
 $MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = ka^2$.
- b) Existe-t-il une valeur de k pour laquelle B appartient à (Ω_k) .

Exercice 2 -----[6 points]

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$.

- 1) Démontre que la suite (I_n) est positive et décroissante.
- 2) a) $\forall n \in \mathbb{N}$; détermine la dérivée de la fonction $x \mapsto \tan^{n+1}x$.
b) Dédus en que :

$$i_1) \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1} ; \quad i_2) \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} ; \quad i_3) \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

- c) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = I_{n+4} - I_n$. Utilise $i_1)$ pour démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}.$$

- 3) a) Calcule I_2 .
b) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(2) + f(6) + f(10) + \dots + f(4n-2) = I_{4n+2} - I_2$.
c) Dédus en que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1}\right) = \frac{\pi}{4}$
- 4) a) Calcule I_1 .
b) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(1) + f(5) + f(9) + \dots + f(4n-3) = I_{4n+1} - I_1$.
c) Dédus en que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$.

Problème -----[9 points]

PARTIE A

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \ln(1 + e^x)$

1°) a) Etudie les variations de f .

b) Montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 1 + x] = 0$.

Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ? Trace cette courbe.
(Unité : 2cm).

c) Montre que f réalise une bijection de $] - \infty ; + \infty [$ sur $] - \infty ; 0 [$.

2°) Soit g la fonction de la variable réelle x définie par : $g(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$

a) Démontre que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Montre que quel que soit le réel x , $g'(x) = e^{-x} f(x)$.

c) Montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$.

d) Etudie les variations de g et tracer sa courbe représentative dans le repère précédent.

3°) a) Montre que $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

b) A tout réel λ , on associe le réel $I(\lambda) = \int_0^\lambda g(x) dx$. Justifie l'existence de $I(\lambda)$.

Calcule $I(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.

c) Calcule $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda)$.

Partie B

1°) Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.

2°) a) Calculer $g(0)$.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable au point $\ln 2$.

c) Déterminer l'équation de la tangente à $(C_{g^{-1}})$ au point d'abscisse $\ln 2$.

BONNE CHANCE !!!