

**DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES**

**Exercice 1 :**

[6 points]

- 1) Linéarise  $z_1 = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$  (0,5pt)
- 2) a) Ecris  $z_2 = \frac{7+3i}{2+5i}$  et  $z_3 = \frac{1+\sqrt{2}+i(1-\sqrt{2})}{1+2}$  sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. (1pt)
- b) Ecris  $z_4 = \frac{2i}{z_2}$  sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. (0,5pt)
- c) Déduis-en les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et de  $\sin \frac{\pi}{12}$ . (0,5pt)
- 3) Ecris sous forme trigonométrique  $z_5 = \frac{-2i(3-i\sqrt{3})^4}{(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6})(-1+i)^2}$  et  $z_6 = -1 - i + \sqrt{2}$ . (1pt)
- 4) Résous dans  $\mathbb{C}$  :
  - a)  $z^2 - 2\sqrt{2}z + 5 = 0$  (0,5pt)
  - b)  $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  (0,5pt)
- 5) On donne  $u = \sqrt{2} - \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ .
  - a) Ecris  $u^2$  sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. (1pt)
  - b) Déduis-en le module et un argument du nombre complexe  $u$ . (0,5pt)

**Exercice 2 :**

[4 points]

Les parties A et B sont indépendantes.

A. Dans chacun des cas suivants, détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation affine  $f$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$ .

- 1)  $z' = -z + 3 - 2i$  (0,25pt)
- 2)  $z' = (1+i)z + 3 - 4i$  (0,5pt)
- 3)  $z' = (1+i)\bar{z} + 3 - 4i$  (0,5pt)

B. On considère le plan complexe rapporté au repère orthonormal  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

Soit le polynôme de variable complexe  $z$  :

$$P(z) = z^3 + (1 - 2i \sin \alpha)z^2 - 2(3 + 2i \sin \alpha)z + 6i \sin \alpha \text{ avec } \alpha \in ]-\pi, 0[.$$

- 1) Calcule  $P(-3)$ . (0,25pt)
- 2) Détermine les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $P(z) = (z+3)(az^2 + bz + c)$ . (0,5pt)
- 3) Résous dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ . (0,75pt)
- 4) Détermine le module et un argument de chacune des solutions de l'équation  $P(z) = 0$ . (0,75pt)

- 5) Soit  $z_1$  et  $z_2$  les solutions non réelles de l'équation  $P(z) = 0$ .  
 Ecris  $z_1$  et  $z_2$  sous la forme  $\lambda + e^{i\alpha}$  où  $\lambda$  est un nombre réel. Déduis-en que lorsque  $\alpha$  décrit  $]-\pi; 0[$ , les points  $M_1$  et  $M_2$  d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$  dans le plan complexe sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. (0,5pt)

**Problème**

[10 points]

A. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  d'unité graphique 1 cm.  
 On considère le polynôme complexe  $p(z) = z^4 - 2(2 - i)z^3 + 2(3 - 4i)z^2 - 6(2 - i)z + 9$ .

1. Calcule  $p(1)$  et  $p(-3i)$ . (1pt)
2. Résous dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $p(z) = 0$ . (1pt)

B. Les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  du plan complexe ont pour affixes respectives :  $z_A = 1$ ,  $z_B = -3i$ ,  $z_C = 3$  et  $z_D = i$ .

$M$  est le point d'affixe  $z$  distinct de  $A$  et  $M'$  celui d'affixe  $z'$  distinct de  $D$  avec  $z' = \frac{z-i}{1-z}$ .

1. Démontre que  $z' = i \frac{z-z_B}{z-z_A}$  puis interprète géométriquement le module et un argument du nombre complexe  $z'$ . (1pt)

2. On pose  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont des nombres réels.

- a. Ecris  $z'$  sous la forme algébrique. (1,5pt)
- b. Déduis-en l'ensemble  $(E)$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $z'$  soit réel. (1pt)
- c. Vérifie que  $B$  appartient à  $(E)$  puis représente  $(E)$ . (0,5pt)

3. a. Exprime  $z$  en fonction de  $z'$ . (0,5pt)

b. Déduis-en que  $OM = \frac{M'C}{M'D}$ . (0,5pt)

c. Montre que, lorsque le point  $M$  décrit le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 privé du point  $A$ , son image  $M'$  appartient à une droite fixe que l'on définira géométriquement. (0,5pt)

d. Montre que si  $M$  est un point de l'axe réel, distinct de  $O$  et de  $A$ , alors  $M'$  appartient à la droite  $(CD)$ . (0,5pt)

4. Détermine l'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z$  tel que :

- a.  $|z'| = 1$  (0,5pt)
- b.  $|z'| = \frac{2}{3}$  (0,5pt)
- c.  $\arg(z') = \pi + k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  (0,5pt)
- d.  $\arg(z + 3i) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  (0,5pt)