

Situation1

1) Détermine la nature du triangle ABC dans chacun des cas suivants :

$$\begin{aligned} a) \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & b) \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & c) \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} &= i \\ d) \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} &= -2i\sqrt{3} & e) \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} &= e^{i\frac{\pi}{4}} & f) \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i \end{aligned}$$

2) Soit $P(z) = z^3 - 4z + \lambda$ où $z \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

a) Montre que si z_0 est racine de P alors $\bar{z}_0$ l'est aussi

b) Détermine λ pour que $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ soit racine de P, trouve alors les autres racines de P.

3) Résous dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

a) $z^4 - (5 - 2i)z^2 + 50i = 0$

b) $z^4 + (2 - 2i)z^3 - 4iz^2 - 16z + 32i = 0$ (solutions réelle et imaginaire existent)

c) $2z^2 - 2(1 - \cos 2\alpha)z + 1 - \cos 2\alpha = 0$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

On donnera en fonction de α , le module et un argument de chaque solution

4) z étant un nombre complexe, on considère l'équation (E) : $z^5 = 16 - 16i\sqrt{3}$

1) Soit $U = 1 + i\sqrt{3}$. Ecris U sous forme trigonométrique

2) Vérifie que U est une solution de (E).

3) Détermine les racines cinquièmes de l'unité. En déduis dans $\mathbb{C}$ toutes les solutions de (E)

4) Place dans le plan complexe les points images des solutions de (E)

Situation2

I) 1) Dans chacun des suivants, détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f du plan complexe qui a pour écriture complexe f est-elle une isométrie ?

a) $z' = z + 3i$ b) $z' = 2z + 3i$ c) $z' = -2iz + 4 + i$ d) $z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}z - 5i$

e) $z' = (1 + i)z - i$ f) $z' = 3i\bar{z} + 2$ g) $z' = i\bar{z} - 1 + i$ h) $z' = -i\bar{z} + 2i$

2) Dans chacun des suivants, détermine l'écriture complexe, la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f du plan complexe qui a pour expression analytique :

$$a) \begin{cases} x' = -x - y + 2 \\ y' = x - y - 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1 \end{cases}$$

II) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A(0;2)$,

$A(0;2)$, $B(0;1)$ et $C(-1;1)$ et $D(1;1)$. On désigne par S la similitude directe du plan qui transforme A en C et B en D.

1) Soit M le point du plan d'affixe z et M' d'affixe z' son image par S

a) Détermine l'écriture complexe et les éléments caractéristiques de S et de SoS

b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques l'application réciproque de S^{-1} de S.

2) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x', y' sont des nombres réels

a) Exprime les réels x', y' en fonction de x, y . b) Soit Ω le point du plan d'affixe

$\omega = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$, détermine une équation cartésienne de l'image par S de la droite $(A\Omega)$

c) Détermine le point E dont le transformé E' par S est le symétrique de E par rapport à O.

3) a) détermine les réels a et b tels que O soit le barycentre du système: $\{(\Omega; 1), (A; a), (B; b)\}$

b) Justifie sans calcul que O', image de O par S est le barycentre de $\{(\Omega; 1), (C; a), (D; b)\}$

4) Soit (C) le lieu des points M d'affixe z vérifiant: $z\bar{z} - (z + \bar{z}) - i(z - \bar{z}) - 6 = 0$

a) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (C)

b) Détermine l'équation cartésienne de la courbe (C') image de (C) par S

c) En déduis la nature et les éléments caractéristiques de (C')

d) Identifie l'homothétie h et la rotation r telles que $S = hor$ ou $S = roh$.