

	Exercice 1 : (4pts) Soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ on considère l'ensemble $E = \{M(a, b) = aI + bJ \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
0,5	1) a) Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel .
0,25	b) Montrer que $B = (I, J)$ est une base de $(E, +, \cdot)$ et déterminer $\dim(E)$.
0,5	2) a) Vérifier que $J^2 + I = \sqrt{3} J$ puis en déduire que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$
0,5	b) Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif .
0,25	3) Soit $\omega \in (\mathbb{C} - \mathbb{R})$ Montrer que $(1, \omega)$ est une base de $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
	4) Soit l'application $\varphi : \begin{matrix} E & \rightarrow & \mathbb{C} \\ M(a, b) & \mapsto & a + \omega b \end{matrix}$
0,5	a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(E, +)$ vers $(\mathbb{C}, +)$.
0,5	b) Déterminer les valeurs de ω pour que φ soit un homomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{C}, \times)$
	5) On prend $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
0,5	a) Déterminer J^n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$.
0,5	b) Déterminer : $H = \{n \in \mathbb{N} \mid J^n = I\}$
	Exercice 2 : (2,5 pts) Pour tout nombre complexe z on pose : $f(z) = 2iz^2 + 2(-1 + i)z - 1$ et on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_m) : z^2 - (m + i(1 - m))z + m(1 - im) = 0$
0,5	1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 0$.
0,5	b) En déduire z_1 et z_2 les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E_m)
0,5	2) On pose $m = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \pi[$ Ecrire z_1 et z_2 sous la forme exponentielle .
1	3) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé et direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points $M(m), M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$
	Déterminer la nature de : $E = \{M(m) \mid z_1 = z_2 \}$ et $F = \{M(m) \mid O, M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont alignées} \}$
	Exercice 3 : (3,5 pts) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E) : 29x - 13y = 6$ et soit S l'ensemble de solution de (E) .
0,5	1) Montrer que $S = \{(2 + 13k, 4 + 29k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$
	2) On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $(F) : x^{19} \equiv -2 \pmod{29}$.
0,5	a) Montrer que -8 est solution de (F) .
	b) Soit x solution de (F)
1	Montrer que : $x^{28} \equiv 1 \pmod{29}$ et $x^{57} \equiv -8 \pmod{29}$ puis $x \equiv -8 \pmod{29}$.
0,5	c) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (F)
1	3) Résoudre dans $\mathbb{Z} : \begin{cases} (x - 3)^{19} \equiv -2 \pmod{29} \\ (x - 3)^{13} \equiv -2 \pmod{13} \end{cases}$

Problème : (10 pts)

Partie I : On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par : $\begin{cases} h(x) = x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) \\ f(0) = 0 \end{cases}$

0,5

1) (Montrer que f est dérivable à droite de 0 .

2) On admet que $(\forall x \in [0, +\infty[) \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

0,25

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \right)$

1

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))$ et Etudier la branche infinie a (C_f) au $V(+\infty)$.

0,5

3) a) Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad f'(x) = 2x \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2(1+x)} \right)$

0,5

b) Montrer que f' est continue sur I .

0,5

c) En utilisant T.A.F montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad \frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$

0,25

d) En déduire la monotonie de f sur $[0, +\infty[$.

0,5

4) Tracer C_f la courbe de f (en précisant la demi tangente à droite du point $(0, 0)$)

0,5

5) Montrer que f est une bijection de I vers I (on admet que f^{-1} sa bijection réciproque est continue à droite en 0) .

6) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}): u_{n+1} = f(u_n)$

0,5

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}): u_n > 0$.

0,5

b) Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad f(x) < x$

0,5

c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer la limite de (u_n) .

Partie II : Soit F la fonction définie sur I par : $(\forall x \in I) : F(x) = \int_x^1 f(t) dt$.

0,5

1. Calculer $F(x)$ pour tout x de I .

0,5

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} (F(x))$ en déduire que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{4\ln 2 - 1}{6}$

0,75

3. Montrer que : $\int_0^{\ln 2} f^{-1}(t) dt = \int_0^1 t f'(t) dt$ et déduire la valeur de $\int_0^{\ln 2} f^{-1}(t) dt$

0,5

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f^{-1}(\frac{k}{n} \ln 2)$

Montrer que la suite $(s_n)_{n>0}$ est convergente et déterminer sa limite .

Partie III : Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $T_n = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+nt^n} dt$

0,25

1. vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \int_0^1 f(t) dt - T_n = \int_0^1 \frac{nt^n f(t)}{1+nt^n} dt$

2. Montrer que :

0,5

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 \leq \int_0^1 \frac{nt^n f(t)}{1+nt^n} dt \leq n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} f(x) dx + \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 f(x) dx$$

0,5

3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n \right) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 f(x) dx \right) = 0$

0,5

4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (T_n)$