

DEVOIR SURVEILLÉ N°1

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2} - \sqrt{2x^2 - x - 1}}{1 - x^2} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} ; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\arctan \sqrt{2 - x}}{\sqrt{2 + x} - 2} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - \frac{\pi}{2}}{x} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^4 + 3x} - 2\sqrt[3]{x^3 + 1}.$$

Exercice 2

On pose : $x = \arctan(\sqrt{2})$.

- ① Vérifier que : $0 < \pi - 2x < \frac{\pi}{2}$.
- ② Calculer $\tan(\pi - 2x)$ puis en déduire que :

$$\arctan(2\sqrt{2}) + 2\arctan(\sqrt{2}) = \pi$$

Exercice 3

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}$.

- ① Déterminer l'ensemble de définition D_f .
- ② Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- ③ La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en $x_0 = 0$?

Exercice 4

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = \arctan(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$$

- ① Montrer que la fonction g est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle J que l'on déterminera.
- ② Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\exists ! \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[) : x = (\tan \theta)^2$

- 3 a Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : g(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\sqrt{x})$.
 b Déterminer l'expression de g^{-1} la fonction réciproque de g .

Exercice 5

Pour tout entier naturel non nul n on considère la fonction numérique h_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$h_n(x) = x^n + \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$$

On note (C_n) la courbe représentative de la fonction h_n dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 Montrer que l'équation $h_n(x) = 1$ admet une unique solution u_n dans l'intervalle $\mathbb{R}^+$.
 1 Prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < u_n < 1$.
 3 a Etudier la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}) sur l'intervalle $]0, 1[$.
 b En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 c Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.
 d Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
 e En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - (u_n)^n)$.

DEVOIR SURVEILLÉ N°2

Exercice 1

- ① On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)(x-3)(x-4)(x+4)$$

Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet exactement 3 solutions dans $\mathbb{R}$.

- ② On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

- a Montrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et que pour tout réel positif x on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

- b Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, 1 - \frac{x}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq 1 + \frac{x}{2}$

- ③ Soit h la fonction définie, continue et dérivable sur $[0, 1]$ telle que $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, $h'(0) = h'(1) = 0$

- a Montrer que $\exists c \in]0, 1[: \frac{h(c)}{c} = \frac{h(c)-1}{c-1}$

- b En déduire que $h(c) = c$.

Exercice 2

On considère les suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies pour tout n de $\mathbb{N}$ par : $u_n = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k^2} \right) - \arctan(n+1)$ et $v_n = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k^2} \right) - \arctan(n)$.

- ① Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que : $\arctan(k+1) - \arctan(k) < \frac{1}{1+k^2} < \arctan(k) - \arctan(k-1)$

- ② Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ par :

$$f(x) = 1 + 3\cos^2(x)$$

- 1 Montrer que la fonction f est une bijection de I sur un intervalle J à déterminer. On notera f^{-1} sa fonction réciproque.
- 2 a Justifier que f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]1, 4[$ et que pour tout x de $]1, 4[$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x^2 + 5x - 4}}$
- b Montrer que $\left(\forall x \in \left[\frac{7}{4}, \frac{13}{4}\right]; \frac{1}{3} \leq (f^{-1})'(x) \leq \frac{2}{3}\right)$.
- 3 a Calculer $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
- b Montrer que l'équation $f^{-1}(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\frac{7}{4}, \frac{13}{4}\right]$.
- 4 Montrer que $\left(\forall x \in \left[\alpha, \frac{13}{4}\right]; \frac{1}{3}(x + 2\alpha) \leq f^{-1}(x) \leq \frac{1}{3}(2x + \alpha)\right)$

Exercice 4

Soit F la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$F(x) = 2x - \frac{1}{\arctan(x)}$$

- 1 a Montrer que pour tout $x > 0$, $F'(x) = 2 + \frac{1}{(1+x^2)\arctan^2(x)}$
- b En déduire que pour tout $x > 0$, $F'(x) \geq 2$.
- 2 Montrer que la fonction F réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer. On notera F^{-1} sa bijection réciproque.
- 3 Montrer que l'équation $F(x) = x$ admet une solution unique α dans $]0, +\infty[$ et que $\alpha > 1$
- 4 a Montrer que F^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- b Déduire que pour tout réel x , $|F^{-1}(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

Exercice 5

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\arctan x}{x}; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$

- 1 Etudier la parité de la fonction f .
- 2
 - a Montrer que la fonction f est continue en 0.
 - b En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que : $(\forall x > 0); \frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$.
 - c Montrer que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$
- 3
 - a Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $(\forall x \in]0, +\infty[); f'(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{1+x^2} - \arctan x \right)$
 - b Dédurre que f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$
- 4
 - a Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
 - b Construire la courbe (C_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- 5 Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $]0, 1[$.
- 6 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = \frac{x}{1+x^2} - \arctan x + \frac{x^2}{2}$$

- a Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+); g'(x) = \frac{x((x^2+1)-2x)}{(x^2+1)^2}$
 - b Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $(\forall x \in \mathbb{R}^+); |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
- 7 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0, 1[\\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
 - a Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; 0 < u_n < 1$.
 - b Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.
 - c En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

DEVOIR SURVEILLÉ N°2

Exercice 1

- 1 Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*; \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}$.
- 2 En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :
 $(\forall x \in]0, +\infty[; \ln(1+x) \leq x \leq (1+x)\ln(1+x)$
- 3 a Prouver que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*; \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leq e^n \leq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

b En déduire que :

$$(\forall n \geq 2; \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leq \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sqrt[n]{n+1}.$$
- 4 Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ puis déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
 Soit $m \in \mathbb{C}$ et (E) l'équation telle que :

$$(E) : z^2 + (m - im)z + im + m - 1 = 0$$

- 1 a Vérifier que le discriminant de (E) est $\Delta = ((1+i)m - 2)^2$.
 b Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On notera z_1 et z_2 les solutions de (E).
- 2 Dans cette question, on pose $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.
 Écrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.
- 3 Dans ce qui suit, $m \in \mathbb{C} - \left\{\frac{1}{2}, \frac{-1-i}{2}, i, 1-i\right\}$. On considère les points M, M_1, M_2 et Ω d'affixes respectives $m, im - 1, -m + 1$ et $\omega = i$.
 Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- a Déterminer l'ensemble des points M tel que les points M_1, M_2 et M soient alignés.
- b Déterminer l'ensemble des points M tel que les droites (MM_1) et (MM_2) soient perpendiculaires.
- c Donner l'écriture complexe de la rotation R puis déterminer l'affixe du point $R(M_1)$.
- d Déterminer l'ensemble des points M tel que les points M, M_1, M_2 et Ω soient cocycliques.

Exercice 3

Partie A

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Soit g_n la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g_n(x) = n(x+1) + \ln(x)$.

- 1 Étudier les variations de la fonction g_n et dresser son tableau de variation.
- 2
 - a Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution β_n dans $]0, +\infty[$.
 - b Vérifier que $\beta_n \leq e^{-n}$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$
- 3 Dédurre le signe de $g_n(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Partie B

Soit f_n la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{x(\ln(x))^n}{1+x} & ; \quad x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1
 - a Étudier la continuité de f_n à droite en 0.
 - b Étudier la dérivabilité de f_n à droite en 0 et interpréter ce résultat graphiquement.
- 2 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation graphique aux résultats obtenus.
- 3
 - a Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$: $f'_n(x) = \frac{(\ln(x))^{n-1} \times g_n(x)}{(1+x)^2}$.
 - b Pour chaque cas de la parité de n , dresser le tableau de variation de f_n .

- 4 Construire la courbe (C_2) .

Partie C

- 1 Vérifier que $f_n(e) = \frac{e}{1+e}$.
- 2 Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in [1, e]); f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$.
- 3 a Montrer que l'équation $(E_n) : f_n(x) = \frac{e}{2(1+e)}$ admet une unique solution u_n dans $[1, e]$.
 - b Vérifier que $\forall n \geq 2, f_{n+1}(u_n) \leq \frac{e}{2(1+e)}$.
 - c Etudier la monotonie de la suite (u_n) et en déduire qu'elle est convergente. On notera β sa limite.
- 4 a Montrer que $\forall n \geq 2 : u_n \leq \beta$.
 - b En déduire que $\forall n \geq 2 : f_n(u_n) \leq \frac{\beta(\ln(\beta))^n}{1+\beta}$.
- 5 On suppose que $\beta \in [1, e[$; calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta(\ln(\beta))^n}{1+\beta}$.
- 6 Déterminer la valeur de β .

Exercice 4

Soit h la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par : $h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

- 1 Montrer que h réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$.
On note h^{-1} la fonction réciproque de h .
- 2 Vérifier que $h^{-1}(\sqrt{2}) = -\ln(\sqrt{2} - 1)$.
- 3 a Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[: h'(x) = \sqrt{h^2(x) - 1}$
 - b En déduire que h^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que

$$(h^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$
- 4 Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h^{-1}(x)}{x - 1}$
- 5 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h^{-1}(x)}{x}$

DEVOIR SURVEILLÉ N°4

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(x) = x^n + 1 - 2e^{-x}$.

$$f_n(x) = x^n + 1 - 2e^{-x}$$

- 1
 - a Dresser le tableau de variation de la fonction f_n .
 - b Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $\mathbb{R}^+$ et que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < \alpha_n < \ln(2)$.
- 2
 - a Prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n(\alpha_n - 1)$.
 - b Déterminer la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ puis déduire qu'elle est convergente.
 - c Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0$ puis déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.

Exercice 2

Partie I

Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(t) = e^t - (t + 1)$.

- 1 Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R} : e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x h(t) dt$.
- 2 Étudier le sens de variation de h sur les intervalles $[0, +\infty[$ et $]-\infty, 0]$.
- 3 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $0 \leq \int_0^x h(t) dt \leq xh(x)$ et $\frac{1}{2} \leq \frac{e^x - (x + 1)}{x^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{h(x)}{x}$.
- 4 $x \in \mathbb{R}_-^*$, montrer que $xh(x) \leq \int_0^x h(t) dt \leq 0$ et $\frac{1}{2} + \frac{h(x)}{x} \leq \frac{e^x - (x + 1)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$.
- 5 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x}$ puis déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (x + 1)}{x^2}$.

Partie II

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- ① Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
- ② Étudier les branches infinies de (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
- ③ Montrer que f est dérivable en $x_0 = 0$
- ④ Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(e^x - 1)^2}$ où $\varphi(x) = (1 - x)e^x - 1$.
- ⑤ Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- ⑥ Construire la courbe (C_f) .

Partie III

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

- ① Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ qu'il faut déterminer.
- ② a Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+) : f'(x) = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$.
b Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+) : e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$ puis déduire que
 $(\forall x \in \mathbb{R}_+) : -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$
- ③ a Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
b Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|1 - \alpha|$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 3

Soit m un nombre complexe.

A - On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$(E_m) : z^2 + (im + 2)z + im + 2 - m = 0$$

- ① a Vérifier que $\Delta = (im - 2i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_m) .
b Donner en fonction de m les solutions de l'équation (E_m) .
- ② Pour $m = i\sqrt{2}$, écrire les solutions de l'équation (E_m) sous la forme exponentielle.

B - Dans le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, M, M' et Ω d'affixes respectives $a = -1 - i$, m , $m' = -im - 1 + i$ et $\omega = i$.

- 1 Soit R la rotation qui transforme M en M' .
 - a Vérifier que Ω est le centre de R .
 - b Déterminer l'afixe b du point B tel que $R(B) = A$.
- 2
 - a Vérifier que $m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$.
 - b En déduire que les points A , M et M' sont alignés si, et seulement si A , B , Ω et M sont cocycliques.
 - b Montrer que l'ensemble des points M tels que A , M et M' soient alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

