

DEVOIR DE MATHEMATIQUES N°2

(TRIMESTRE 1 - VENDREDI 25 OCTOBRE 2024 – DUREE 4 HEURES)

EXERCICE 1 : (3 points)On considère la suite (S_n) , $n \geq 1$ définie par : $S_n = \frac{1}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{7}{5^3} + \dots + \frac{3n-2}{5^n}$.

- 1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a : $S_{k+1} - S_k = \frac{3k-2}{5^k} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{5^{k+1}}$. 1pt
- 2) En déduire :
 - a) le sens de variation de la suite (S_n) . 0,25pt
 - b) la relation $S_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}S_n + \frac{3}{20}(1 - \frac{1}{5^n}) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. 1pt
- 3) Dédurre des questions 2) que la suite (S_n) est majorée. 0,25pt
- 4) Montrer que (S_n) converge, puis calculer sa limite. 0,5pt

Exercice: 2 (6 points)On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{p-1}}{p}$$

Le but de l'exercice est de montrer que (S_n) converge vers $\ln(2)$.

- 1) Calculer : S_1, S_2, S_3 et S_4 . (1 pt)
- 2) On considère les suites (U_n) et (V_n) définies, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$U_n = S_{2n} \text{ et } V_n = S_{2n+1}$$
 - a) Démontrer que (U_n) et (V_n) sont adjacentes, c'est-à-dire que :
 - (U_n) est croissante, (V_n) est décroissante.
 - pour tout entier naturel n non nul : $U_n \leq V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) = 0$. (0,75 pt)
 - b) Justifier que :
 - i) la suite (U_n) est majorée par V_1 (0,25 pt)
 - ii) les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et ont même limite. (0,5 pt)
 - c) En déduire que (S_n) converge vers un réel L . (0,25 pt)
- 3) Dans cette question, $x \in \mathbb{R}^+$ et on pose $P_{2n}(x) = \sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^{p-1}x^p}{p}$.
 - a) Montrer que $P_{2n}(x) = \frac{1 - (-x)^{2n}}{1+x}$. (0,5 pt)
 - b) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(1+x) - \sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^{p-1}x^p}{p}$.
 - i) Montrer que $f'(x) = \frac{1}{1+x} - P_{2n}(x)$. (0,5 pt)
 - ii) En déduire le sens de variations de f . (0,25 pt)
 - iii) Calculer $f(0)$, puis montrer que, pour $x \in \mathbb{R}^+$: $\ln(1+x) \geq \sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^{p-1}x^p}{p}$. (0,5 pt)
 - c) En posant $g(x) = \ln(1+x) - \sum_{p=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{p-1}x^p}{p}$.
 - i) Montrer que $g'(x) = \frac{1}{1+x} - P_{2n+1}(x)$. (0,25 pt)
 - ii) En déduire que : $\ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{p}$. (0,5 pt)

- 4) a) Montrer que : $U_n \leq \ln(2) \leq V_n$ pour tout entier naturel n non nul. (0,5 pt)
- b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln(2)$. (0,25 pt)

PROBLEME (11 POINTS)

PARTIE A :

On donne $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} - x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}x)} & \text{si } x \in]-1; 0[\end{cases}$

- 1) Étudier la continuité de f en -1 . (0,25 pt)
- 2) Prouver que f n'est pas dérivable à gauche en -1 . Donner une interprétation graphique du résultat. (0,5 pt)
- 3) a) Prouver que f est dérivable sur $] -\infty; -1[$ et sur $] -1; 0[$. (0,5 pt)
b) Calculer $f'(x)$ sur les intervalles où f est dérivable. (0,75 pt)
c) Écrire une équation cartésienne de la demi-tangente à droite en -1 . (0,25 pt)
- 4) Dresser enfin le tableau de variation de f . (0,5 pt)
- 5) Montrer que $(\Delta): y = -2x - 1$ est une asymptote à la courbe de f en $-\infty$. (0,25 pt)
- 6) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé. (1 pt)

PARTIE B :

- 1) Prouver que f réalise une bijection notée f^{-1} de $] -\infty; 0[$ dans l'intervalle J à préciser. (0,5 pt)
- 2) Étudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 0 . (0,25 pt)
- 3) Montrer que $f^{-1}(x) = -\frac{x^2+2x+2}{2(x+1)}$; pour tout $x \in [0; +\infty[$ (0,5 pt)
- 4) a) Montrer que $f^{-1}(-1) \in [-1; 0[$ (0,25 pt)
b) Donner une équation cartésienne de la tangente à $(C_{f^{-1}})$ au point d'abscisse -1 . (0,5 pt)
- 5) Montrer que $f^{-1}(x) = x$ possède une seule solution λ dans $\mathbb{R}$ et que $\lambda \in]-1; 0[$ (0,5 pt)
- 6) Prouver que $f^{-1}([-1; 0]) = [-1; 0]$ (0,5 pt)

PARTIE C :

Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$; $\forall n \in \mathbb{N}$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \in [-1; 0]$ (0,25 pt)
- 2) Montrer que si (U_n) converge alors sa limite est λ . (0,25 pt)
- 3) Soit la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $V_n = U_{2n}$; $\forall n \in \mathbb{N}$
 - a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$; $V_{n+1} \leq V_n$ (0,25 pt)
 - b) Prouver alors que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite est λ . (0,5 pt)

PARTIE D :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n f^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right)$

- 1) Prouver que $\forall k \in \{1; 2; 3; \dots; n\}$; $f^{-1}(-1) \geq f^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right) \geq f^{-1}\left(-\frac{1}{n}\right)$ (0,5 pt)
- 2) Dédire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $-\frac{1}{2n} \geq S_n \geq \frac{f^{-1}\left(-\frac{1}{n}\right)}{n}$; préciser alors $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ (0,5 pt)

BONNE CHANCE