

Devoir n°2 du 1^{er} Sem.
Classe de : T^{le}C

Lycée de Niamtougou

Matière : Mathématiques

Date : M/03/12/2024
Durée : 03h30' coeff

SITUATION COMPLEXE

(8 points)

Dans le cadre d'un projet agricole scolaire, le lycée Niamtougou dispose d'un jardin composé de trois parcelles pour cultiver des tomates, des aubergines et des patates. La parcelle réservée à la culture des tomates a la forme d'un triangle rectangulaire dont l'un des sommets M est un point variable situé sur un cercle dont le diamètre a pour longueur l'unité. Les deux autres parcelles sont des lunules associées à la parcelle triangulaire. Voir la figure ci-contre. Le chef d'établissement souhaite alors connaître la position du point M sur le cercle pour laquelle l'aire de la parcelle des tomates est maximale. En visite dans votre classe, il vous soumet sa préoccupation et profite de l'occasion pour présenter un plan de décoration d'un objet de forme hexagonale à la placer à la bibliothèque du lycée.

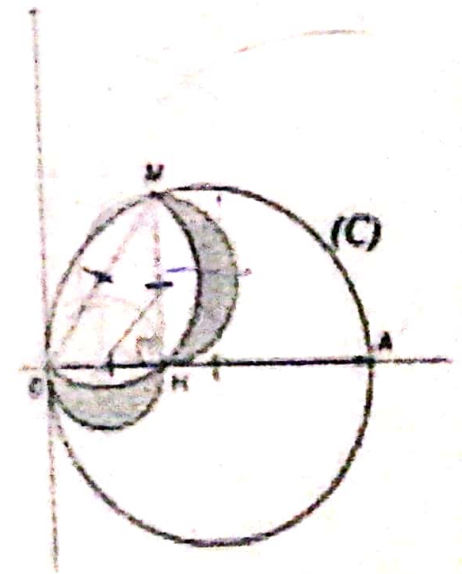


FIGURE 1 -

FIGURE 1 -

Dans le plan complexe orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les sommets de cet objet sont les points M dont les affixes sont solutions de l'équation $z \in \mathbb{C}, z^6 - 4\sqrt{2}(1 + i) = 0$.

Consigne 1 : après avoir montré que la somme des aires des deux lunules est égale à celle de la parcelle triangulaire, montrez que cette aire est égale à $A(x) = \frac{x\sqrt{x-x^2}}{2}$.

Consigne 2 : à partir d'une argumentation bien détaillée, répondez à la préoccupation de chef d'établissement sur la position du point M pour que l'aire des lunules soit maximale.

Consigne 3 : Modélisez les positions des sommets de l'objet de décoration dans un plan complexe.

Barème

Consignes	Pertinence	Correction	Cohérence	Perfectionnement
Consigne 1	0,5	0,5	0,5	0,25
Consigne 2	1,5	1	1	0,5
Consigne 3	0,5	1	0,5	0,25

Consigne 3	0,5	1	0,5	0,25
------------	-----	---	-----	------

EXERCICE 1

(6 points)

I. Choisir la bonne réponse parmi les proposées.

1. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes la suite de terme général z_n définie par :
$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n + \frac{1}{2}i \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$$

$\mathbb{N}$

On pose $z_n = x_n + iy_n$ et $u_n = z_n + i$ avec x_n et y_n des réels $\forall n \in \mathbb{N}$.

a. (u_n) est une suite géo- b. (u_n) est une suite arith- c. (u_n) est une suite géo- d. (u_n) est une suite arith-
métrique de raison $\frac{1}{2}$ et de métrique de raison $\frac{1}{2}$ et de métrique de raison $\frac{1}{2}$ et de métrique de raison $\frac{1}{2}$ et de
premier terme $u_0 = 1 + i$ premier terme $u_0 = 1 + i$ premier terme $u_0 = 1 - i$ premier terme $u_0 = 1 - i$

2. z_1, z_2 et z_3 sont trois nombres complexes de module 1 et $z_1 + z_2 + z_3 = 1$. $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 3$ $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 1$
 $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 2$

3. Dans le plan complexe P , muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ on considère le point M d'affixe z , $A(3)$ et $B(4)$. L'ensemble des points M du plan tel que $\left| \frac{z-3}{z-4} \right| = 2$ est :

- a. Le cercle de diamètre $[AB]$ b. La médiatrice du segment $[AB]$ c. La droite (AB) . d. Aucune bonne réponse.

4. Soit E l'ensemble des fonctions f définies et dérivables sur $]0, +\infty[$ telles que, pour tous réels x et y strictement positifs $f(xy) = f(x) + f(y)$.

- (a) En posant $x = y = 1$ a. $f(1) = 1$ b. $f(1) = 0$ c. $f(1) = -1$ d. $f(1) = 2$

(b) $f\left(\frac{1}{x}\right) =$

- a. $-f(x)$ b. $f(x)$ c. $2f(x)$ d. $\frac{1}{2}f(x)$

(c) $f(\sqrt{x}) =$

- a. $-f(x)$ b. $f(x)$ c. $2f(x)$ d. $\frac{1}{2}f(x)$

(2 × 0,5pt)

B. Répond par vrai ou faux.

1. $3\sqrt{x^2 - 4} - 4x < 0 \iff x \in]-\infty; -2]$

2. La partie réels de $Z = \frac{z+2+i}{z+2i}$ est $\frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$.

C. Compléter les phrases suivantes par le mot ou groupe de mots ou le nombre convenable. (4 × 0,5pt)

1. Soit $\theta \in]-\pi; \pi[$.

Le module et un argument du nombre complexe $z_\theta = \frac{\cos \theta + i \sin \theta + 1}{\cos \theta + i \sin \theta - 1}$ est...

2. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I tels que $a < b$. S'il existe M et

EXERCICE 2

(6 points)

I. ABC est un triangle équilatéral de sens direct. (Γ) est le cercle circonscrit au triangle ABC et de centre O . La médiatrice du segment $[BC]$ coupe (Γ) en A et D . A' est le point d'intersection des droites (BD) et (AC) .

1. Démontrer que $A' = S_C(A)$
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de : $S_{(BD)} \circ S_{(DC)}$; $S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$ et $S_{(DC)} \circ S_{(CA)}$.
3. On note $f = S_{(BD)} \circ S_C \circ S_{(AB)}$.
 - (a) Déterminer $f(A)$ puis la nature et les éléments caractéristiques de f .
 - (b) En déduire la nature de $S_{(BD)} \circ S_C$.

II.

1. (a) Montrer que pour tout $x > 0$; $(1 + \frac{1}{x})^x = e^{x \ln(1+x)} e^{-x \ln(x)}$.
 (b) Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \frac{1}{x})^x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$.
 (c) Soit $(u_n)_{n>0}$ définie par $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Montrer l'existence de u_n puis calculer sa limite.
2. (a) Démontrer que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
 (b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.
3. (a) On considère $f(x) = x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)$. Étudier les variations de f sur $]0; 1[$.
 (b) Montrer que pour tout $x \in]0; 1[$, $f(x) \geq -\ln(2)$.
 (c) En déduire que pour tout $x \in]0; 1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

Bonne chance !