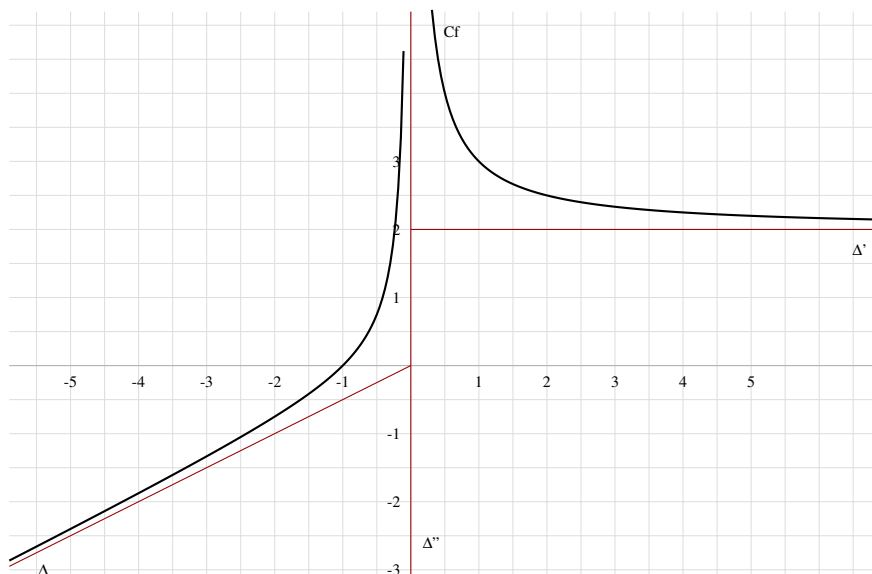


	LYCEE PILOTE DE SOUSSE LE 11 / 11 / 2023	Devoir de contrôle N°1 MATHEMATIQUES	CLASSE : 4Math₁₊₂₊₃₊₄ DUREE : 2 heures
---	--	--	---

Exercice 1 (7 points)

I] On a représenté ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$.



Les droites $\Delta : y = \frac{1}{2}x$, $\Delta' : y = 2$ et $\Delta'' : x = 0$ sont des asymptotes à C_f .

En utilisant le graphique répondre aux questions suivantes :

1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin\left(f(x) - \frac{1}{2}x\right)}{2f(x) - x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f\left(\tan\left(\frac{\pi}{2x}\right)\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(-1 + 2x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$$

2) a- Déterminer l'ensemble de définition de fof.

b- Déterminer le sens de variation de fof sur $[1, +\infty[$.

II] On admet que la restriction g de f à l'intervalle $[1, +\infty[$ est définie par $g(x) = \frac{2x+1}{x}$.

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases} ; \quad n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 2$.

2) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+2} = 2 + \frac{U_n}{2U_{n+1}}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$.

a- Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n \leq 1 + \sqrt{2}$.

b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_n \leq W_n$.

c- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} - V_{n+1} \leq \frac{1}{25} (W_n - V_n)$.

d- Montrer que les suites (V_n) et (W_n) sont adjacentes. En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2 (6 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

On considère f_n la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par : $f_n(x) = x \sin(2x) + \cos^2(x) + nx^2 - 2$

- 1) Montrer que f_n est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- 2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans $]0, \frac{\pi}{2}[$.
- 3) a- Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
b- Montrer alors que la suite (α_n) est décroissante. En déduire que (α_n) est convergente.
- 4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, 0 < \alpha_n < \frac{2}{\sqrt{n}}$. En déduire la limite de (α_n) .
- 5) a- Montrer que $\forall x \in [0, \pi], \sin x \leq x$.
b- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \alpha_n \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
c- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2\sqrt{n}} \geq \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
- 6) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on pose : $S_n = \sum_{k=2}^n \alpha_k$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, S_n \geq \sqrt{n+1} - \sqrt{2}$. En déduire la limite de (S_n) .

Exercice 3 (7 points)

I/ 1) Déterminer les racines cubiques de l'unité.

2) On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Vérifier que $1 + j + j^2 = 0$ et que $1 + j = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

II/ Soit $m \in \mathbb{C}^* \setminus \{j\}$.

On considère l'équation dans $\mathbb{C}$: $(E_m) : z^2 - (1+j)mz + m^2j = 0$.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) .
- 2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points $\Omega(1); I(-1); M(m)$ et $M'(jm)$.

- a - Montrer que les droites (OM) et $(\Omega M')$ sont perpendiculaires $\Leftrightarrow m\bar{m} + m + \bar{m} = 0$.
- b - Déterminer l'ensemble $(\Gamma) = \{M \in P \text{ tel que } (OM) \perp (\Omega M')\}$.
- c - Soit M un point du cercle de centre I de rayon 1 distinct de O , construire M'

3) Soit $M''(j^2m)$

On considère l'application R du plan dans le plan qui à tout point $N(z)$ associe le point $N'(z')$

tel que $z' = (1+j)z$

- a - Montrer que pour tout point N distinct de O ,
 $R(N) = N' \Leftrightarrow$ le triangle ONN' est équilatéral direct.
- b - On considère les points $A(a), B(b)$ et $C(c)$ tel que $A = R(M); B = R(M')$ et $C = R(M'')$
Montrer que $a = -mj^2; b = -m$ et $c = -mj$
- c - On considère les points $P(p), Q(q)$ et $R(r)$ tel que $P = A * M', Q = B * M''$ et $R = C * M$
Montrer que $p - q = \frac{m}{2}(-2j^2 + j + 1)$ et $p - r = \frac{m}{2}(-j^2 + 2j - 1)$
- d - Montrer que $p - q = -j(p - r)$. Quelle est la nature du triangle PQR ?