

Devoir N°2 de Mathématiques-3^{ème} Trimestre
(Vendredi 26/05/2026)

Niveau : TC

Durée : 3 heures

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Unité : 2 cm.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (8 - 6i)z + 1 - 5i = 0$.
- 2) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$; $z_B = \frac{3}{2} - i$; $z_C = i$ et $z_D = 1 + \frac{1}{2}i$.
 - a) Placer les points A, B, C et D dans le repère.
 - b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $Z = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$. En déduire la nature du triangle ABC.
- 3) Soit f l'application du plan d'écriture complexe $f: Z' = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)z + 1 - i$.

Donner la nature et les éléments caractéristiques de f .

- 4) On considère les suites des nombres complexes (Z_n) et (a_n) définies par : $\begin{cases} Z_0 = 2+i \\ Z_{n+1} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)Z_n + 1 - i \end{cases}$ et $a_n = Z_n - 2$
 - c) Démontrer que (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - d) Exprimer a_n en fonction de n . Mettez a_n sous forme exponentielle puis Z_n en fonction de n .

Exercice 2 : n étant un nombre entier naturel non nul. On place dans une urne n boules rouges, $8 + n$ boules noires et 20 boules blanches.

Un jour tire une boule de l'urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

S'il tire une boule rouge, il perd ;

S'il tire une boule noire, il gagne ;

S'il tire une boule blanche, il remet cette boule dans l'urne et effectue un nouveau tirage, toujours avec équiprobabilité.

S'il tire une boule noire, il gagne sinon il perd.

- 1) Déterminer la probabilité pour que le joueur gagne.

On notera que cette probabilité est $P(n)$.

- 2) Déterminer la probabilité pour que ce joueur perd.
- 3) Déterminer l'entier n pour que $P(n)$ soit maximale.

Problème

Partie A : On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = (2 - x)e^x - 2$.

- 1) Etudier le sens de variation de φ puis dresser le tableau de variation de φ .
- 2) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une est nulle et l'autre $\alpha \in]1; 2[$.
- 3) En déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0.
- 2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, puis montrer que $f'(x) = \frac{x\varphi(x)}{(e^x - 1)^2}$.
- 3) Montrer que $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$.
- 4) Etudier les variations de f puis construire (C_f) (on prendra pour la construction $\alpha = 1,6$).

Partie C : On considère F définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

- 1.a) Justifier l'existence de $F(x)$ pour tout x positif.

b) Montrer que F est croissante sur $[0; +\infty[$.

- 2.a) Soit $G(x) = \int_{\ln 2}^x t^2 e^{-t} dt$. Calculer $G(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$.

b) Montrons que $\forall t \in [\ln 2; +\infty[$, on a : $f(t) \leq 2t^2 e^{-t}$.

En déduire qu'il existe un réel positif M tel que $\forall x \geq 0$, on a : $F(x) \leq M$ (on pose $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L$)

- 3.a) Montrer que $\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-nx} + \frac{e^{-nx}}{e^x - 1}$

b) Montrer que $\forall x \in [0; \alpha]$ on : $0 \leq \int_0^x f(t) e^{-nt} dt \leq \frac{\alpha(2-\alpha)}{n}$

c) Calculer $I_n(x) = \int_0^x t^2 e^{-nt} dt$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x)$.

d) Montrer que $\forall x \geq 0$, on a : $\sum_{k=1}^n I_k(x) = F(x) - \int_0^x f(t) e^{-nt} dt$.

e) En déduire que la fonction $H_n(x) = \int_0^x f(t) e^{-nt} dt$ admet une limite L_n lorsque x tend vers $+\infty$ et vérifiant

$$L - L_n = 2 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} \right)$$