

Exercice : (5 points)

Soit (U_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2. \end{cases}$$
 On pose $V_n = U_n - 3$

1- Calculer U_1 ; U_2 ; V_0 ; V_1 et V_2

2- Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera sa raison.

3- Exprimer V_n en fonction de n puis U_n en fonction de n

4- a. Calculer la somme $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

b. Calculer la somme $T_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

5- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

1. Calcul de U_1 , U_2 , V_0 , V_1 et V_2 .

$$U_0 = 4$$

$$U_1 = \frac{1}{3}U_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 4 + 2 = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$$

$$U_2 = \frac{1}{3}U_1 + 2 = \frac{1}{3} \times \frac{10}{3} + 2 = \frac{10}{9} + 2 = \frac{28}{9}.$$

$$V_n = U_n - 3 \text{ donc :}$$

$$V_0 = U_0 - 3 = 4 - 3 = 1$$

$$V_1 = U_1 - 3 = \frac{10}{3} - 3 = \frac{10-9}{3} = \frac{1}{3}$$

$$V_2 = U_2 - 3 = \frac{28}{9} - 3 = \frac{28-27}{9} = \frac{1}{9}.$$

$$U_1 = \frac{10}{3}, \quad U_2 = \frac{28}{9}$$

$$V_0 = 1, \quad V_1 = \frac{1}{3}, \quad V_2 = \frac{1}{9}$$

2. (V_n) est géométrique.

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 3 = \left(\frac{1}{3}U_n + 2\right) - 3 = \frac{1}{3}U_n - 1 = \frac{1}{3}(U_n - 3) = \frac{1}{3}V_n$$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $V_0 = 1$.

3. Expression de V_n puis de U_n en fonction de n .

Comme (V_n) est géométrique, on a : $V_n = V_0 q^n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

$$V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Or $U_n = V_n + 3$ donc $U_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$.

$$U_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$$

4. Sommes.

a. Somme $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$.

S_n est la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique.

$$S_n = V_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$S_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

b. Somme $T_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.

$$U_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k + 3 \text{ donc}$$

$$T_n = \sum_{k=0}^n U_k = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^n 3 = S_n + 3(n+1)$$

$$\text{Donc } T_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + 3(n+1)$$

$$T_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + 3(n+1)$$

5. Limite de U_n .

$$U_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3 \text{ et comme } \left|\frac{1}{3}\right| < 1, \text{ on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0 + 3 = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 3$$