

Exercice: TSE (2024-2025)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm)

Partie A:

Soit g la fonction numérique définie sur $] -\pi, o[$ par $g(x) = \cos^2 x + \cos x - 1$

1.) a) Montre que g est dérivable sur $] -\pi; o[$ et que $g'(x) = -\sin x(2 \cos x + 1)$

b) En déduis que $g'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \left] -\pi; -\frac{2\pi}{3} \right[$ et que $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; o \right[$.

c) Dresse le tableau de Variation de g .

2) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in] -\pi; o[$ et que $\beta \in \left] -\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4} \right[$

b) En déduis le signe de g sur $] -\pi; o[$.

Partie B:

Soit f la fonction numérique définie sur $] -\pi; +\infty[$

$$\text{par : } \begin{cases} f(x) = \frac{2 \sin(2x)}{1 + \cos x} + \frac{1}{2} & \text{si } x \in] -\pi; o[\\ f(x) = 2 - \frac{3}{e^{3x} + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note $(\mathcal{C}f)$ la courbe représentative de f .

1) Etudie la continuité de f en 0.

2) Etudie la dérivabilité de f en 0 et en déduis une interprétation géométrique des résultats obtenus.

3.) a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) Montre que pour tout $x \in] -\pi, o[$, on a: $f(x) = \frac{4 \sin(x) \cdot \cos(x)(1 - \cos(x))}{1 - \cos^2(x)} +$

$1/2$ et en déduis que $\lim_{x \rightarrow -\pi} f(x) = +\infty$.

c) En deduis les asymptotes de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

4.) a) Calcule $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$ et en deduis le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$

b) Montre que $f'(x) = \frac{4g(x)}{1 + \cos(x)}$ pour tout $x \in]-\pi; 0[$ et en deduis le sens de variation de f sur $] -\pi; 0[$

c) Dresse le tableau de variation de f sur $] -\pi; +\infty[$.

5) Construis $(\mathcal{C}_f)$, ses asymptotes et ses demi-tangentes au point d'abscisse 0.

Partie C:

On admet que pour tout $x \in [1,5; 2]; 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

1.) Soit h la fonction definie sur $[1,5; 2]$ par :

$$h(x) = f(x) - x$$

Etudie les variations de h et en deduis que l'equation $f(x) = x$ admet une solution unique

$$\alpha \in [1,5; 2]$$

2) Soit (U_n) la suite numerique definie par:

$$\begin{cases} U_0 = 1,5 \\ U_{n+1} = f(U_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a) Montre par recurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n \in [1,5; 2]$$

b.) Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_{n-1} - \alpha|$ et que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c.) En deduis que la suite (U_n) est convergente.

d.) Determine l'entier naturel n_0 tel que U_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

On donne $h(1,5) = 0,46; h(2) = -0,007; \ln 10 = 2,30; \ln 2 = 0,29$.