

EXERCICES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES

◇ LIMITES ET CONTINUITÉ

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants, calcule la limite de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.

$$a) f(x) = -9x^3 + 2x^2 + 6 ; b) f(x) = -2x^4 + x^2 - 1 ; c) f(x) = \frac{7x+1}{5x^2-x} ; d) f(t) = \frac{|1-t|}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$e) f(x) = \frac{(1-x)^5}{(-x^2-5x)(4x+1)} ; f) f(x) = \frac{5x^2-8x+7}{6x^2-5x} ; g) f(x) = \sqrt{9x^2-3} - x$$

$$h) f(t) = \sqrt{|t - \sqrt{t^2+1}|} ; i) f(x) = u - 2 + \sqrt{u^2 - u + 9} ; j) f(v) = \sqrt{v^2 + v + 1} - (v+1).$$

Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants, calcule la limite de la fonction f en 0.

$$a) f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} ; b) f(x) = \frac{\sin^3 x}{x^2} ; c) f(x) = \frac{\tan^2 x}{x} ; d) f(x) = \frac{\sin 3x}{\tan x}$$

$$e) f(x) = \frac{x_3 \cos^3 x}{\sin^2 x} ; f) f(x) = \frac{\sin x + \tan x}{x} ; g) f(x) = \frac{\cos x + \cos 2x}{\cos 3x + 3 \cos 4x} ; h) f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}.$$

Exercice 3 :

$$1^\circ) \text{ Démontre que : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

2  ) En déduire les limites suivantes.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x} ; b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cos x - 1} ; c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x \tan x} ; d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x}.$$

$$\text{Soit } f : x \mapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}$$

Détermine D_f et calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$.

Exercice 4 :

Calcule les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 6x + 4}{x^2 - 1} ; b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15} ; c) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{2x} - 4}{\sqrt{x+1} - 3} ; d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x - \sqrt{x+2}} ; f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - 1} ; g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\pi x} ; h) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} - 2 \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} ; j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} ; k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos x}{2 \cos^2 x - \cos x - 1}.$$

Exercice 5 :

Utiliser les propriétés de comparaison pour calcule la limite de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.

$$a) f(x) = \sqrt{x} - \cos x ; b) f(x) = \frac{2x + \sin x}{x^2 + 1} ; c) f(x) = 2x + 1 - 3 \sin x ; d) f(x) = \frac{x+1}{x^2-3} \sin(x^7).$$

Exercice 6 :

1  ) Etudie les branches infinies des courbes représentatives des fonctions suivantes.

$$a) f(x) = x^4 - 2x^2 + 6x - 5 ; b) f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x - 1} ; c) f(x) = \frac{x - 3}{-x^2 + x + 2}$$

$$d) f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} ; e) f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3} ; f) f(x) = x - \sqrt{x+2} ; g) f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

EXERCICES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES

2°) Dans chacun des cas suivants, démontre que la droite (Δ) est asymptote à la courbe représentative (C) de la fonction f ; et précise dans chaque cas la position relative de (C) et (Δ).

a) $f(x) = 3x - 1 - \frac{x-1}{(x+1)^2}$, (Δ) : $y = 3x - 1$; b) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 5}{(x-1)^2}$, (Δ) : $y = x + 1$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, (Δ) : $y = x - 2$.

Exercice 7 :

I. Soit la fonction numérique f définie

par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^5 - x^4 + x^3 + 3}{x + 1}, & \text{si } x \neq -1 \\ f(-1) = 12 \end{cases}$$

Démontre que f est continue en -1 .

II. Détermine le réel m pour que la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 2ax - a^2 & ; x \leq a \\ f(x) = \frac{m}{x-a} \sin(x^2 - a^2) + a & ; x > a \end{cases}$$

Soit continue en a (avec a un réel non nul).

Exercice 8 :

Dans chacun des cas suivants, détermine a pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - x}{x - 1}, & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = a \end{cases}$; b) $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{\sin x} - 1}{x - \frac{\pi}{2}}, & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ f(\frac{\pi}{2}) = a \end{cases}$

Exercice 9 :

I. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{3 + \cos x} - 2}{x^2}$.

1°) f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

2°) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $|f(x)| < \frac{1}{x^2}$ puis détermine $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

II. Soit la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{3x^2 + 6} & ; x \geq 1 \\ f(x) = \frac{1}{x^2 - x} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & ; x < 1 \end{cases}$$

1. Etudie la continuité de f en 1 .

2. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 10 :

1. Dans chacun des cas suivants, démontre que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique réelle et détermine une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

a) $f(x) = x^3 - 6x - 6$; b) $f(x) = x^3 + 10x - 1$.

2. Montre que l'équation $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = x$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.

◇ DERIVATION ET ETUDE DE FONCTION

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants, étudie la dérivabilité de la fonction f sur son ensemble de définition puis détermine sa dérivée.

EXERCICES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES

$$\begin{aligned} a) f(x) &= (x-2)\sqrt{2-x} & ; & & b) f(x) &= \frac{x^2 - |x-1|}{x} \\ c) f(x) &= \sqrt{2x+5} & ; & & d) f(x) &= (x+1)\sqrt{x^2-3x-4}. \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Détermine la dérivée des fonctions suivantes.

$$\begin{aligned} 4) f(x) &= (1-x)^3(3x^2+2x) ; 5) f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-x-1} ; 6) f(x) = \left(\frac{2x+9}{4x-1}\right)^2 \\ 7) f(x) &= \frac{(2x-1)^2}{(3x+1)^3} ; 8) f(x) = \sqrt{x^2-3x} ; 9) f(x) = (x^2-1)\sqrt{x+1} \\ 1) f(x) &= -x^5+5x^3-\frac{4}{5} ; 2) f(x) = 2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3} ; 3) f(x) = (x^3-2x^2+x-1)^4 \\ 10) f(x) &= \sqrt{\frac{x+2}{x-1}} ; 11) f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{3x-2} ; 12) f(x) = \cos 3x - \sin 2x + \tan(-5x+1) \\ 13) f(x) &= \cos^3(1-x^2) + \sin^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) ; 14) f(x) = \sin(\cos x) + x^2 \cos \frac{1}{x} ; 15) f(x) = \tan(\tan x). \end{aligned}$$

Exercice 3 :

En utilisant la définition du nombre dérivé, calcule les limites suivantes.

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} & ; \quad b) \lim_{x \rightarrow a} \frac{(2x-1)^{2026} - 1}{x - 1} ; \quad c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{3 \cos^2 x - \sin^2 x}{3x - \pi} \\ d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi} & ; \quad e) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi} ; \quad f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+x+3} - 3}{x - 2} ; \quad g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}. \end{aligned}$$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{4x+a}{2x^2+ax+b}$ avec a et b des nombres réels.

1°) Détermine a et b pour que la courbe représentative de f admette en -2 et 1 des extremums.

2°) Précise la nature de ces extremums.

Exercice 5 :

Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x^2-3x+1}{x+1}$ et (C) sa courbe représentative.

1°) Détermine une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

2°) Existe-t-il des points de (C) où la tangente a pour coefficient directeur -4 ?

3°) Existe-t-il des points de (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation

$$4x - 2y + 1 = 0 ?$$

Exercice 6 :

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$.

1°) Démontre que f est une bijection de I vers J que l'on déterminera.

2°) Sans explicite sa bijection réciproque f^{-1} , calcule $(f^{-1})'(1)$.

Exercice 7 :

I. Soit f la fonction de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ vers $[-1; 1]$, définie par : $f(x) = \sin x$.

1°) Démontre que f admet une fonction réciproque f^{-1} .

EXERCICES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES

2°) Détermine l'intervalle sur lequel f^{-1} est dérivable et démontre que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

II. Soit f la fonction de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ vers $[1; +\infty[$ définie par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

1°) Démontre que f admet une fonction réciproque f^{-1} .

2°) Détermine l'intervalle sur lequel f^{-1} est dérivable et démontre que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Exercice 8 :

Détermine les dérivées première et seconde des fonctions suivantes.

$$\begin{aligned} a) f(x) &= 2x^2 - 3x + 4 ; & b) f(x) &= \frac{x^2 + 1}{2x} , & c) f(x) &= \sqrt{x^2 - 2x} \\ d) f(x) &= \cos^3 x ; & e) f(x) &= \sin^3 x , & f) f(x) &= \tan^2 x. \end{aligned}$$

Exercice 9 :

Dans chacun des cas suivants, étudie la fonction f et trace sa courbe représentative.

$$\begin{aligned} 1) f : x &\mapsto \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 1 ; & 2) f : x &\mapsto \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^2 - 2x + 2} ; & 3) x &\mapsto \frac{x^3}{x^2 - x - 2} \\ 4) f : x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} ; & 5) f : x &\mapsto \frac{3}{4} \sqrt{|x^2 - 4x - 12|} ; & 6) x &\mapsto \frac{2 \sin 2x}{1 + \cos x}. \end{aligned}$$

Exercice 10 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$.

On désigne par (C) la représentation graphique de f .

1°) a) Détermine l'ensemble de définition de f .

b) Calcule les limites de f aux bornes D_f .

2°) a) Calcule la fonction dérivée f' de f et en déduis le sens de variation de f .

b) Dresse le tableau de variation de f .

3°) Construis la courbe (C).

4°) Démontre que la droite (D) d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de (C).

Exercice 11 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x^2 - 3x - 4| - 2$.

On désigne par (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1°) Etudie le signe de $x^2 - 3x - 4$ puis écris $f(x)$ par intervalles.

2°) Calcule les limites de f quand x tend vers $+\infty$ puis vers $-\infty$.

3°) Etudie la dérivabilité de f en -1 puis en 4 . En déduis que (C) admet des demi tangentes en ces points dont on déterminera une équation.

4°) Trace (C) ainsi que les quatre demi tangentes.

Exercice 12 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{-x^3 + x^2 + 7x + 2}{x^2 + 2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, unité graphique : 1 cm.

1°) Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2°) a) Montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 1 + \frac{9x}{x^2 + 2}$.

EXERCICES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES

- b) Démontre que la droite D d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à Cf .
- c) Etudie la position relative de Cf par rapport à D .
- 3°) a) Démontre que la fonction dérivée de f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = \frac{-x^4 - 13x^2 + 14}{(x^2 + 2)^2}$.
- b) Factorise le polynôme $g(x) = -x^4 - 13x^2 + 14$ puis étudie son signe.
En déduis le signe de $f'(x)$ et les variations de f .
- c) Dresse le tableau de variation complet de f .
- 4°) Démontre que le point $I(0 ; 1)$ est un centre de symétrie pour la courbe Cf .
- 5°) a) Détermine une équation de la tangente T à la courbe au point I .
- b) Détermine les coordonnées des points de la courbe Cf où la tangente en ces points est parallèle à la droite D .
- 6°) a) Calcule $f(-2)$ et en déduire le points d'intersection de Cf avec l'axe des abscisses.
- b) Construis la courbe Cf et les droites D et T .
- 7°) Discute graphiquement, suivant les valeurs de m (m paramètre réel), le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 13 :

Soit f la fonction définie par : $f(t) = \sqrt{t^2 - 4} - t$

- 1.a) Détermine le domaine de définition de f .
- b) Calcule la dérivée $f'(t)$ et étudie son signe. Etudie la dérivabilité de f en -2 et en 2 ; interprète géométriquement les résultats obtenus
2. Détermine le tableau de variations de f . Etudie les branches infinies de (Cf) ; puis construis (Cf) .
- Soit g la restriction de f sur $[2; +\infty[$.
- a) Montre que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
3. Construis (Cg) et (Cg^{-1}) dans un même repère orthonormé.
4. Calcule $g^{-1}(-2)$; $g^{-1}(-1)$ et $(g^{-1})'(-1)$.
5. Détermine l'expression de $g^{-1}(t)$.

Exercice 14 :

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1}{3} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(2x)$.

- 1°) Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2°) a) détermine la période de f et sa parité.
- b) En déduis son ensemble d'étude D_E .
- 3°) a) Exprime $\sin 3x$ et $\cos 2x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
- b) Etudie les variations de f sur D_E .
- 4°) a) Calcule $f(0)$, $f(x_0)$ et $f(\pi)$ sous forme rationnelle où x_0 est l'unique valeur dans $]0; \pi[$.
- b) Dresse le tableau de variation de f sur D_E .
- c) Construis la courbe de f sur D_E puis sur D_f .

Exercice 15 :

1. On désigne par g la fonction numérique définie sur $[0; \pi]$ par $g(x) = x \cos x - \sin x$.
- a. Etudie les variations de g et dresse son tableau de variations. En déduis le signe de g sur $[0; \pi]$.
- b. Soit f la fonction définie sur $[0; \pi]$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Etudie les variations de f sur $[0; \pi]$.

2. Etude de f en 0

EXERCICES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES

- a. Prouve que, pour tout réel $x \geq 0$, $\frac{1}{6}x^3 \geq x - \sin x \geq 0$ (on pourra introduire la fonction ϕ définie par : $\phi(x) = \sin x - x + \frac{1}{6}x^3$, étudie ses variations et détermine son signe).
- b. Prouve que f est dérivable en 0 et calcule $f'(0)$.
3. Construis la courbe représentative de f .

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit la fonction polynôme g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + 3x - 2$.

1. Etudie les variations de g sur $\mathbb{R}$.
2. Montre que, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in [0; 1]$.
3. En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
4. En utilisant le sens de variation de g , montre que : $\forall x \in [0; 1], |g(x)| \leq 2$.

Partie B : Etude de la fonction principale f .

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$. on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I; J)$.

1. Détermine le domaine de définition de f puis calcule la limite aux bornes de D_f .
2. a. Montre que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \times g(x)$.
b. En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
3. a. Démontre que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote à C .
b. étudie les positions relatives de C par rapport à (D).
4. Montre que $f(\alpha) = \frac{3(1 - \alpha)}{\alpha^2 + 1}$.
5. Trace C et (D).

Partie C :

1. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=x$.
2. Montre que $\forall x \in [0; 1]$, on a : $x \leq f(x) \leq 1$.
3. Montre que $\forall x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$, on a : $\frac{\sqrt{2}}{8} \leq \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \leq \frac{4}{9}$.
4. En utilisant la 4°) de la **partie A**, en déduis que : $\forall x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{8}{9}$.

En utilisant l'inégalité des accroissements finis à f sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$, montre que $|f(x) - 1| \leq \frac{8}{9}|x - 1|$.

Exercice 16 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1}$

- 1) Vérifie que $D_f =]0; +\infty[$.
- 2) Etudie la continuité de f sur D_f .
- 3) Etudie la dérivabilité à droite en 0.
- 4) Calcule $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
- 5) Détermine les branches infinies à C_f .
- 6) Démontre que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer puis donne l'expression de $f^{-1}(x)$.

◇ PRIMITIVES

EXERCICES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives ou l'ensemble des primitives de la fonction f sur un intervalle K que l'on précisera :

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= -x^3 + 6x^2 - 10x - 4 ; 2) f(x) = 2x^5 - 5x^3 + 5x ; 3) f(x) = -\frac{2}{3\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3} - \frac{5}{x^6} \\ 4) f(x) &= (2x - 1)(x^2 - x + 4)^3 ; 5) f(x) = (6x - 15)(-x^2 + 5x - 3) ; 6) f(x) = \frac{x}{(x^2 - 9)^5} \\ 7) f(x) &= \frac{-3x^2 + 1}{(-x^3 + x - 1)^4} ; 8) f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - 1}{3x^2} ; 9) f(x) = \frac{2x^5 - x^3 + 3x^2 + 2}{x^2} \\ 10) f(x) &= \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} ; 11) f(x) = 7x^2(x^3 + 5)^6 ; 12) f(x) = \frac{2x + 4}{\sqrt{-x^2 - 4x + 9}} \\ 13) f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)^2} ; 14) f(x) = \frac{15}{\sqrt{5x - 20}} ; 15) f(x) = \frac{2x + 3}{\sqrt{(x^2 + 3x + 1)^3}}. \end{aligned}$$

Exercice 2 :

I) Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive de la fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= 12 \cos 4x + \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) ; 2) f(x) = -10 \sin 5x + \sin(-6x + 2) ; 3) f(x) = x \cos(4x^2 + 1) \\ 4) f(x) &= (3x^2 + 1) \sin(x^3 + x) ; 5) f(x) = \sin x \cos x (\cos^2 x + 1)^4 ; 6) f(x) = \cos x \cdot \sin^2 x \\ 7) f(x) &= -\sin x \cdot \cos^3 x ; 8) f(x) = \sin 2x \cdot \cos 3x ; 9) f(x) = \cos^2 x ; 10) f(x) = \cos^5 x \\ 11) f(x) &= \sin 2x \cdot \sin 4x ; 12) f(x) = \cos x \cdot \cos 6x ; 13) f(x) = \cos 5x \cdot \sin x ; 14) f(x) = \sin^3 x \\ 15) f(x) &= \sin^4 x ; 16) f(x) = \cos^2 x \cdot \sin^3 x ; 17) f(x) = \cos^3 x \cdot \sin^2 x ; 18) f(x) = \sin^2 x \cdot \cos^2 x. \end{aligned}$$

II) Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive de la fonction f sur l'intervalle K .

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= \frac{\cos x}{\sin^3 x} \text{ et } K =]0; \pi[; 2) f(x) = \frac{\sin x}{\cos^4 x} \text{ et } K = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\\ 3) f(x) &= \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \text{ et } K =]0; +\infty[; 4) f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \text{ et } K = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\\ 5) f(x) &= (1 + \tan^2 x) \tan^5 x \text{ et } K = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[. \end{aligned}$$

Exercice 3 :

Dans chacun des cas suivants, détermine la primitive F de f sur l'intervalle K , qui vérifie la condition indiquée.

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= 5x^4 + 6 ; K = \mathbb{R} \text{ et } F(1) = 0 \\ 2) f(x) &= -3x + \frac{2}{x^2} ; K = \mathbb{R}^* \text{ et } F(1) = 2 \\ 3) f(x) &= \frac{x^2}{3} + \frac{2}{(x-3)^2} ;]-\infty; 3[\text{ et } F(0) = -1 \\ 4) f(x) &= \frac{\cos x}{\sin 2x} ;]0; \pi[\text{ et } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3. \end{aligned}$$

Exercice 4 :

$$1^\circ) \text{ Soit la fonction } f \text{ de } \mathbb{R} \text{ vers } \mathbb{R} \text{ définie par : } f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 5}{(x-1)^2}.$$

EXERCICES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES

- a) Détermine l'ensemble de définition de f et détermine deux nombres réels a et b tels que

$$\forall x \in Df; f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}.$$

- b) En déduis une primitive de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

2°) Soit la fonction g définie par : $g(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 - 4x - 7}{(x+2)^2}$.

- a) Détermine l'ensemble de définition de g et détermine trois nombres réels a , b et c tels que

$$\forall x \in Dg; g(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}.$$

- b) En déduis les primitives de g sur l'intervalle $] -\infty; -2[$.

3°) Soit h une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = \frac{2x+3}{(x-1)^3}$.

- a) Détermine deux nombres réels a et b tels que, pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$:

$$h(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3}$$

- b) En déduire la primitive de la fonction h tel que $H(-1) = 0$.

4°) On considère la fonction f définie sur $]0; 1[$ par : $f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$.

- a) Détermine deux réels a et b tels que : $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2}$.

- b) Détermine les primitives de f sur $]0; 1[$.

- c) En déduis la primitive F de f vérifiant la condition $F\left(\frac{1}{2}\right) = 4$.

5°) Soit la fonction $f: x \rightarrow \frac{1}{1-\sin x}$

En remarquant que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{1}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$.

Détermine les primitives de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice5 :

I. Soit la fonction g définie sur $]-2; +\infty[$ par : $g(x) = x\sqrt{x+2}$.

Détermine des réels a , b et c pour que la fonction G définie sur $]-2; +\infty[$

par : $G(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x+2}$ soit une primitive de g .

II. f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{4 - (x-2)^2}{(x-2)^2}$.

Transforme cette expression, puis détermine une primitive de f sur un intervalle que l'on déterminera.